

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Invitación al álgebra lineal numérica

Carlos E. Mejía
Profesor Titular

Trabajo presentado en el marco del
Semestre Sabático Julio 2016 - Enero 2017

Índice general

I	Algebra lineal	11
1.	Matrices y vectores	13
1.1.	Matrices	14
1.2.	Multiplicación de matriz por vector	17
1.3.	Nota MATLAB	18
2.	Matrices y determinantes	21
2.1.	Producto de matrices	21
2.2.	Determinantes	24
2.3.	Inversa de una matriz	25
2.4.	Nota MATLAB	26
3.	Espacios vectoriales	27
3.1.	Definición	27
3.2.	Ejemplos de espacios vectoriales	28
3.3.	Subespacios	28
3.4.	Ejemplos de subespacios	28
3.5.	Independencia lineal	29
3.6.	Base de un espacio vectorial	30
3.7.	Sumas e intersecciones de subespacios	30
4.	Sistemas lineales	33
4.1.	Eliminación de Gauss	33
4.2.	Formulación matricial de la eliminación de Gauss	36
4.3.	Nota MATLAB	39
4.4.	Invertibilidad	40
4.5.	Nota MATLAB	41

5. Forma escalonada reducida y rango	43
5.1. Operaciones elementales	44
5.2. Matrices elementales	45
5.3. Relación entre columnas y filas	48
5.4. Forma normal del rango	50
6. Matrices y transformaciones lineales	53
6.1. Definición	53
6.2. Representación matricial	54
6.3. Composición y subespacios asociados	55
6.4. Ortogonalidad	56
6.5. Cuatro subespacios fundamentales	57
6.6. Valores y vectores propios	58
6.7. Nota MATLAB	59
7. Normas de vectores y matrices	61
7.1. Valor absoluto	61
7.2. Normas de vectores	62
7.3. Normas de matrices	64
7.4. Nota MATLAB	66
II Análisis matricial	67
8. Perturbaciones, errores y condicionamiento	69
8.1. Errores absoluto y relativo	70
8.2. Sistema lineal	71
8.3. Condicionamiento de normas matriciales	73
8.4. Suma y producto de matrices	73
8.5. Invertir una matriz	74
9. Condicionamiento y sistemas lineales	79
9.1. Lado derecho perturbado	79
9.2. Caso general	80
9.3. Estabilidad de métodos directos	81
10. Sistemas lineales especiales	83
10.1. Problemas con valores en la frontera	83
10.2. Ecuación del calor	87

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	5
10.3. Ecuación de Laplace	90
10.4. Nota MATLAB	94
11. Primeros algoritmos de factorización de matrices	95
11.1. Matriz diagonalizable	95
11.2. Factorización LU	98
11.3. Factorización de Cholesky	100
12. Factorización QR	101
12.1. Matrices de Householder	101
12.2. La factorización QR	103
12.3. Valores propios	104
12.4. Nota MATLAB	107
13. Descomposición en valores singulares (SVD)	109
13.1. La factorización SVD	110
13.2. Nota MATLAB	116
13.3. ¿Qué sigue?	116

Prefacio

Estas notas de clase se escriben como apoyo para dos cursos: uno de la parte final de un pregrado en matemáticas y otro de la parte inicial de una maestría en matemáticas. En la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, estos cursos se llaman *Álgebra lineal aplicada* y *Aspectos numéricos del álgebra lineal* respectivamente.

Del lector de este manuscrito se espera que haya tenido contacto con el álgebra lineal y no necesariamente con el álgebra lineal numérica. Libros adecuados para ese primer contacto son [S], [Lang], [M], [ND] y [P]. El libro de Noble y Daniel [ND] es un libro introductorio de álgebra lineal numérica. El libro de Meyer [M] también es un libro de álgebra lineal numérica pero es un poco más avanzado que el de Noble y Daniel. Los otros tres libros son libros de texto para cursos de álgebra lineal de segundo o tercer semestre de pregrado.

Desde ya advertimos que en estas notas no se citan todas las referencias bibliográficas que aparecen al final, dicha lista sirve de apoyo a las notas y es una invitación a los lectores a conocer otros materiales sobre el tema.

En varias partes del manuscrito hay unas notas cortas llamadas **Nota MATLAB**. Con ellas se busca motivar el uso de este software para el aprendizaje del álgebra lineal numérica. Recordemos que MATLAB es un nombre que surgió de la combinación en una sola palabra de las tres primeras letras de las palabras **Matrix Laboratory**.

Para el autor, la mejor manera de aprender a usar a MATLAB es por medio de ejemplos obtenidos de clase o libros o de algún otro documento físico o virtual. El profesor Cleve Moler, inventor de MATLAB y fundador de la empresa Mathworks, escribió dos excelentes libros que usan MATLAB y que se pueden comprar en SIAM o descargarlos gratuitamente de <https://www.mathworks.com/moler.html>

Estas notas están divididas en dos partes. La primera, llamada **Álgebra lineal**, contiene material teórico fundamental. Allí hay definiciones y resultados relacionados con vectores, matrices, transformaciones lineales, determinantes, sistemas lineales, entre otros. La segunda, llamada **Análisis matricial**, incluye ejemplos y algoritmos seleccionados entre los muchos que hay en álgebra lineal numérica. La selección se hizo con la idea de apoyar el trabajo interdisciplinario que tiene al álgebra li-

neal numérica como uno de sus pilares. Por tanto el material tratado tiene que ver con condicionamiento, estabilidad, factorizaciones de matrices, solución de sistemas lineales por métodos directos y en menor medida, cálculo de valores propios.

En el prefacio de [S], Gilbert Strang escribe: *Personalmente considero que mucha más gente necesita álgebra lineal que cálculo.* Hay muy buena justificación para esta afirmación y de hecho el autor de estas notas tiene la misma creencia. Es que muchos de los problemas de ingeniería y ciencias se modelan por medio de ecuaciones diferenciales ya sea ordinarias o parciales y lo usual para un investigador de ciencias o ingeniería es resolver numéricamente estas ecuaciones. Eso significa llegar a un problema de álgebra lineal numérica. Más adelante en estas notas se explicará un poco sobre este proceso.

Escribir este manuscrito es un anhelo que el autor tiene desde hace varios años. El trabajo [AM] sobre métodos iterativos, escrito con Carlos D. Acosta, se puede considerar predecesor de este libro pero trata temas más avanzados. Los trabajos [Layton] y [vdG] son ejemplos inspiradores con mayor alcance que el presente trabajo pero con el mismo estilo de distribución via web, siempre buscando llegar a una amplia audiencia.

La escritura de este manuscrito se hizo durante el semestre sabático del que disfrutó el autor en el segundo semestre de 2016. Sea esta la oportunidad de agradecer a la Universidad Nacional de Colombia por haberme concedido dicho semestre sabático.

Este libro está en construcción y así se ofrece en la página web personal del autor que se puede encontrar en la lista de docentes de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. Actualmente, en diciembre de 2016, las direcciones URL son:

Página web del autor <http://www.unalmed.edu.co/~cemejia>

Página en Google Sites: <https://sites.google.com/unal.edu.co/cemejia/home>

Página web de la Escuela de Matemáticas:

<http://ciencias.medellin.unal.edu.co/escuelas/matematicas/>

Nomenclatura

Escalares

Letras griegas minúsculas α, β, \dots o letras latinas o griegas minúsculas con subíndices $x_i, a_{ij}, \lambda_k, \dots$

Vectores

Letras latinas minúsculas a, b, x, y, \dots o letras latinas mayúsculas con subíndice $A_i, A_{*j}, A_{i*}, \dots$ o la letra e minúscula con un subíndice por ejemplo e_j para vectores canónicos.

Matrices

Letras latinas, griegas o en estilo caligráfico mayúsculas $A, B, \Lambda, \mathcal{V}, \dots$ y ocasionalmente, si no hay confusión, también se usan esas mismas letras con un subíndice.

Los elementos de la matriz A son a_{ij} o A_{ij} , sus columnas son A_{*j} , sus filas son A_{i*} . Los asteriscos se suprimen cuando no hay confusión, por ejemplo cuando en el contexto solo se están utilizando las columnas de la matriz.

Los elementos del vector x son x_i .

Principales superíndices y subíndices: i, j, k, l, m, n .

El número 0 se usa como escalar, vector y matriz.

La matriz identidad se denota I o si hay peligro de confusión, I_n .

LD: Linealmente dependiente.

LI: Linealmente independiente.

CL: Combinación lineal.

TL: Transformación lineal.

$\sigma(A)$: Espectro de la matriz A .

$\rho(A)$: Radio espectral de la matriz A .

e_j : Vector canónico. Es el vector columna cuya componente j –ésima es 1 y las demás son 0.

$\det(A)$: Determinante de la matriz A .

$\text{traza}(A)$: Traza de A .

A^T : Traspuesta de la matriz A .

A^* : Conjugada traspuesta de la matriz A .

$\text{cond}_p(A) = k_p(A)$: Número de condición de la matriz A con respecto a la p -norma, $1 \leq p \leq \infty$. Se omite el subíndice si no hay confusión.

A^{-1} : Inversa de la matriz A .

$\text{rank}(A)$: Rango (rank) de A .

$R(A)$: Rango (range) de A . También se llama subespacio imagen de A .

$\ker(A)$: Núcleo de A .

Si S es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial, el subespacio generado por S se denota $Sg(S)$ o $Sp(S)$ o $Span(S)$.

$p_\lambda(t) = \det(A - \lambda I)$: Polinomio característico de A . Sus raíces son los valores propios de A .

C_p : Matriz compañera del polinomio p .

Matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$: Sus columnas constituyen una base ortonormal de \mathbb{C}^n .

Matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Sus columnas constituyen una base ortonormal de \mathbb{R}^n .

Matriz de Hessenberg: H es de Hessenberg si $h_{ij} = 0$ para $i > j + 1$.

Matriz de Householder: $U = I - 2ww^T$ con $w \in \mathbb{R}^n$ y $\|w\|_2 = 1$.

Parte I
Algebra lineal

Capítulo 1

Matrices y vectores

En el primer capítulo introducimos muchas de las notaciones y definiciones que utilizaremos. Seguimos de cerca el libro [I] de Ilse Ipsen, profesora de North Carolina State University. La profesora Ipsen regala una copia electrónica de su libro en su página web <http://www4.ncsu.edu/~ipsen>.

Los vectores y las matrices son los principales objetos con los que trabajamos en todo el libro. Entre los años 200 y 100 a. de C. hay evidencias de usos de matrices en China y de forma menos clara en Babilonia. Los determinantes se anuncian en el libro de Cardano *Ars Magna* (1645) y aparecen con más claridad hacia 1683 tanto en Japón como en Europa. Leibniz es uno de los precursores para el concepto de determinante y solo hacia 1812 con Cauchy la noción de determinante quedó establecida como la tenemos ahora.

Aunque la eliminación gaussiana se vislumbra en una obra china titulada *Nine Chapters on the Mathematical Art* del año 200 a. de C., es el propio Gauss quien la usa por primera vez hacia 1809. El primero que usa el término *matriz* es *Sylvester* en 1850. La segunda mitad del siglo XIX es la época de avances en la teoría de matrices y por tanto del álgebra lineal. Entre los matemáticos que más contribuyeron están Sylvester, Cayley, Hamilton, Frobenius y Jordan.

Los datos históricos fueron tomados de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html

1.1. Matrices

Llamamos matriz $m \times n$ a un rectángulo de números

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

con m filas y n columnas. Los elementos a_{ij} son escalares, es decir, elementos de \mathbb{R} el conjunto de los números reales o elementos de \mathbb{C} , el conjunto de los números complejos. Se escribe $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en el primer caso y $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ en el segundo. Si $m = n$, se dice que A es una matriz cuadrada de orden n .

Un vector fila es una matriz $1 \times n$ y un vector columna es una matriz $m \times 1$. El conjunto de vectores columna con m componentes reales se denota \mathbb{R}^m . Análogamente se define \mathbb{C}^m .

1.1.1. Submatrices

Una submatriz de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz obtenida de A suprimiendo filas y/o columnas. Más precisamente, dados dos conjunto de números enteros $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ y $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq n$ entonces la matriz $k \times l$

$$\begin{pmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \cdots & a_{i_1, j_l} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \cdots & a_{i_2, j_l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k, j_1} & a_{i_k, j_2} & \cdots & a_{i_k, j_l} \end{pmatrix}$$

es una *submatriz* de A . Se llama *principal* si es cuadrada y sus elementos diagonales son elementos diagonales de A , es decir, $k = l$ y $i_r = j_r$ para $r = 1, 2, \dots, k$.

1.1.2. Matrices especiales

1. Matriz nula

La matriz nula $m \times n$ se denota 0 y todos sus elementos son cero. Si en una matriz A alguno de sus elementos, digamos a_{lj} , es no nulo, entonces $A \neq 0$.

2. Matriz identidad

La matriz identidad de orden n , denotada I_n , es la matriz cuadrada

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

con *unos* en la diagonal y *ceros* en todas las demás posiciones. En particular, $I_1 = 1$. El subíndice se suprime si no hay confusión y se habla simplemente de la matriz identidad I .

3. Matriz diagonal

La matriz cuadrada A es diagonal si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. En particular la matriz nula es diagonal.

4. Matriz triangular superior (inferior)

La matriz cuadrada A es triangular superior (inferior) si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ($i < j$).

5. Matriz tridiagonal

La matriz cuadrada A es tridiagonal si $a_{ij} = 0$ para $|i - j| > 1$.

6. Matriz de permutación

Una matriz cuadrada es de permutación si contiene un solo uno en cada fila y en cada columna. Aparte de esos unos, todos los demás elementos son cero. Se puede pensar que es cualquier permutación de la matriz identidad.

7. Vectores canónicos

Las columnas de I_n se denominan vectores canónicos e_i y por tanto

$$I_n = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n).$$

1.1.3. Multiplicación por escalar

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\rho \in \mathbb{R}$. El elemento (i, j) de la matriz ρA es

$$(\rho A)_{ij} = \rho a_{ij}.$$

Si $\rho = 0$ entonces se obtiene la matriz nula.

La multiplicación por escalar es asociativa en el siguiente sentido

$$(\alpha\rho) A = \alpha(\rho A).$$

1.1.4. Traza de una matriz cuadrada

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Su traza es el número

$$\text{traza}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Es decir, es la suma de los elementos en la diagonal de A .

1.1.5. Suma de matrices

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ entonces

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

La suma está bien definida en el sentido de la clausura: la suma de dos matrices de $\mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz de $\mathbb{R}^{m \times n}$. Cumple las siguientes condiciones:

1. Asociativa: Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

2. Elemento idéntico: La matriz $0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es tal que para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se cumple

$$0 + A = A + 0 = A.$$

3. Conmutativa: Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces

$$A + B = B + A.$$

4. Distributivas: Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \text{ y } \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

1.1.6. Combinación lineal

Dados n vectores V_1, V_2, \dots, V_n y n escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $n \geq 1$, a la suma

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j V_j$$

se le llama combinación lineal de los vectores V_i con coeficientes α_i .

1.1.7. Producto interno o producto punto

Sean $v = (v_1 v_2 \cdots v_n)$ y $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. El producto interno de v y w es

$$vw = \sum_{j=1}^n v_j w_j.$$

Otras notaciones para el producto interno son $v \cdot w$ ó (v, w) .

1.2. Multiplicación de matriz por vector

1.2.1. Matriz por vector columna

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con filas A_{i*} y columnas A_{*i} y sea $v \in \mathbb{R}^n$ con elementos v_i . Entonces

$$A = \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix} = (A_{*1} A_{*2} \cdots A_{*n}), \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Distinguimos dos formas de considerar el producto Av :

1. Av es un vector columna de productos internos: $(Av)_i = A_{i*}v$.
2. Av es una combinación lineal de las columnas de A : $Av = \sum_{i=1}^n v_i A_{*i}$.

Ejemplo 1.1. La j -ésima columna de A se puede pensar como el producto $A_{*j} = Ae_j$.

1.2.2. Vector fila multiplicado por matriz

Sean A como arriba y $w = (w_1 w_2 \cdots w_m)$. En este caso también vemos el producto de fila por matriz de dos maneras distintas:

1. wA es un vector fila de productos internos: $wA = (wA_{*1} \quad wA_{*2} \quad \cdots \quad wA_{*m})$.
2. wA es una combinación lineal de las filas de A : $wA = \sum_{i=1}^m v_i A_{i*}$.

1.2.3. Producto externo (outer product)

Sean $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ y $w = (w_1 \ w_2 \ w_m)$. El producto vw es la matriz

$$vw = \begin{pmatrix} v_1w_1 & \cdots & v_1w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_mw_1 & \cdots & v_mw_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.2. Una matriz de Vandermonde de orden n con potencias de x se puede ver como el producto externo $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ x \ x^2 \ \cdots \ x^{n-1})$.

1.3. Nota MATLAB

Hay dos formas básicas de buscar ayuda en MATLAB. La primera es por medio del cuadro de búsqueda que hay en la esquina derecha superior del escritorio y la segunda es en la línea de comandos, por medio de la orden **doc**. Dos ensayos recomendados son: En la ventana de búsqueda escribir **gallery** y en la línea de comandos escribir **doc gallery**.

En general, la búsqueda en la línea de comandos por medio de la orden **doc** es más efectiva. En el caso de gallery puede verse que **doc** lleva directamente a la documentación sobre **Gallery Test Matrices** y en cambio si se usa la ventana de búsqueda aparecen varios documentos entre los cuales el listado de primero es el que nos interesa.

En estas notas sobre el uso de MATLAB, trabajamos matrices pequeñas, por ejemplo matrices cuadradas de 8 filas y columnas, aun si se toman de Gallery. El lector puede ensayar con tamaños mayores si desea.

```
a= gallery('jordbloc',8,4);% bloque de Jordan
c = gallery('moler',8);% matriz simetrica definida positiva
j = 3*a;% producto por escalar
f = a + c;% suma de matrices
v = trace(c);% traza
x = [4,1,-1,zeros(1,5)];% vector fila
xa = x*a;% vector fila por matriz
```

```
y = xa'; % vector columna como traspuesta de vector fila
z = c*y; % producto de matriz por vector columna
w = z*x; % producto externo
s = x*z; % producto interno
```


Capítulo 2

Matrices y determinantes

En el segundo capítulo sobre matrices y vectores definimos varias operaciones con matrices y algunas clases especiales de matrices. También hacemos referencia a los determinantes que en el resto del libro serán utilizados como herramienta. El material es elemental y por tanto aparece prácticamente en todos los libros del tema. Para escribir estas notas se consultaron primeros capítulos de [I], [L], [Layton] y [Ortega].

2.1. Producto de matrices

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$. El número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B . Su producto es la matriz $D = AB \in \mathbb{R}^{m \times r}$ cuyo elemento (i, j) es

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Pensando en las filas y columnas de las matrices A y B , este producto se puede

presentar de varias formas: Sean $A = (A_{*1} \ A_{*2} \ \cdots \ A_{*n}) = \begin{pmatrix} A_{1*} \\ A_{2*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix}$ y $B =$

$(B_{*1} \ B_{*2} \ \cdots \ B_{*r}) = \begin{pmatrix} B_{1*} \\ B_{2*} \\ \vdots \\ B_{n*} \end{pmatrix}$, es decir, la columna j -ésima de A es A_{*j} , la

fila i -ésima de A es A_{i*} y análogamente para B .

1. $AB = (AB_{*1} \quad AB_{*2} \quad \cdots \quad AB_{*r})$.
2. $AB = \begin{pmatrix} A_{1*}B \\ A_{2*}B \\ \vdots \\ A_{m*}B \end{pmatrix}$.
3. $(AB)_{ij} = A_{i*}B_{*j}$. Matriz de productos internos.
4. $AB = \sum_{i=1}^n A_{*i}B_{i*}$. Suma de productos externos.

2.1.1. Propiedades del producto de matrices

1. $I_m A = A I_n = A$. Identidad.
2. $A(BC) = (AB)C$. Asociatividad.
3. $A(B+C) = AB+AC$ y $(A+B)C = AC+BC$. Distributividades.

Ejemplo 2.1. *El producto no es conmutativo:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ pero } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nota 2.2. *El producto de A consigo misma n veces se denota A^n .*

Definición 2.3. *Una matriz cuadrada es*

1. Una involución si $A^2 = I$.
2. Idempotente o proyector si $A^2 = A$.
3. Nilpotente si existe un entero positivo s tal que $A^s = 0$.

Definición 2.4. *Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Su traspuesta, denotada A^T , es la matriz cuya componente (i, j) es $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. Es decir, las filas (columnas) de A son las columnas (filas) de A^T .*

Definición 2.5. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Su traspuesta conjugada, denotada A^* , es la matriz cuya componente (i, j) es $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$ el conjugado de a_{ji} .*

2.1.2. Propiedades de las traspuestas

1. Para matrices reales, la conjugada traspuesta es lo mismo que la traspuesta.
2. $(A^T)^T = A$, $(A^*)^* = A$.
3. $(\beta A)^T = \beta A^T$, $(\beta A)^* = \overline{\beta} A^*$.
4. $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(A + B)^* = A^* + B^*$.
5. $(AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^* = B^* A^*$.

2.1.3. Propiedades de productos de vectores

Sean $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ vectores de \mathbb{C}^n . Por definición de producto interno, $x^*y = \sum_{i=1}^n \overline{x_i}y_i$ y $x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Definición 2.6. Decimos que los vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de \mathbb{C}^n son ortogonales si $x^*y = 0$. Para vectores reales la condición es la misma, pero se prefiere la siguiente escritura: $x^T y = 0$.

Si $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ entonces $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y además, $i^2 = -1$. El valor absoluto o módulo del número complejo z es $|z| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{x^T x}$. Para los vectores x y y de \mathbb{C}^n también se cumplen los siguientes enunciados:

1. $y^*x = \overline{(x^*y)}$.
2. $y^T x = x^T y$.
3. $x^*x = 0$ si y solo si $x = 0$.
4. Si x es real entonces $x^T x = 0$ si y solo si $x = 0$.
5. $I_n = \sum_{i=1}^n e_i e_i^T$.

Definición 2.7. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es

1. Simétrica si $A^T = A$.
2. Hermitiana si $A^* = A$.
3. Antisimétrica (skew-symmetric) si $A^T = -A$.
4. Antihermitiana (skew-hermitian) si $A^* = -A$.

Proposición 2.8. Si $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ entonces AA^T y $A^T A$ son simétricas pero AA^* y A^*A son hermitianas. Además, $A + A^T$ es simétrica y $A + A^*$ es hermitiana.

Definición 2.9. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es **simétrica definida positiva** si es simétrica y para todo vector no nulo $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T A x > 0$. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es **hermitiana definida positiva** si es hermitiana y para todo vector no nulo $x \in \mathbb{C}^n$, $x^* A x > 0$. Se dice que son **semidefinidas positivas** si en lugar del signo $>$ se usa el signo \geq .

2.2. Determinantes

El determinante de una matriz cuadrada A de $\mathbb{R}^{n \times n}$ o $\mathbb{C}^{n \times n}$ se define así:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

donde $\varepsilon_\sigma = 1$ si σ es par y $\varepsilon_\sigma = -1$ si σ es impar y además denotamos S_n al grupo de permutaciones de los números $\{1, 2, \dots, n\}$.

Esta definición se puede encontrar en [C], [Ortega] y [H]. Esta última fuente contiene un tratamiento completo sobre el tema.

Otras definiciones para el determinante de una matriz se basan en expansión en cofactores. Más precisamente, para la matriz A denotamos A_{ij} a la matriz obtenida de A suprimiendo la fila i y la columna j . Al número $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ se le denomina **cofactor** del elemento a_{ij} . Las definiciones basadas en cofactores son:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \quad \text{para cada } i \quad (2.1)$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \quad \text{para cada } j.$$

Las propiedades que presentamos a continuación, son las que queremos destacar sobre determinantes.

Teorema 2.10. *Propiedades de los determinantes*

1. Si dos de las filas (columnas) de A son iguales, entonces $\det(A) = 0$.
2. Si A tiene una fila (columna) nula, entonces $\det(A) = 0$.
3. Si se intercambian dos filas (columnas) de A , entonces el determinante de la nueva matriz es $-\det(A)$.
4. Si se multiplica una fila (columna) de A por un escalar β el determinante de la nueva matriz es $\beta \det(A)$.
5. $\det(A^T) = \det(A)$, $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.
6. Si un múltiplo escalar de una fila (columna) de A se suma a otra fila (columna), el determinante se conserva.
7. Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
8. Si A es triangular superior o triangular inferior entonces $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

2.3. Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada A , real o compleja, tiene inversa (también se dice es no singular o es invertible) si existe una matriz del mismo tamaño denotada A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Si A no tiene inversa se dice que es singular o no invertible.

Proposición 2.11. *La inversa es única.*

Demostración. Sea A una matriz cuadrada y sean B y C matrices del mismo tamaño tales que

$$AB = BA = I \text{ y } AC = CA = I.$$

Entonces

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

□

Proposición 2.12. *Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$.*

1. Suponga que $x \neq 0$. Se cumple:
 - Si $Ax = 0$ entonces A es singular.
 - Si A es no singular entonces $Ax \neq 0$.
2. Supongamos $Ax = b$. Si $b \neq 0$ entonces $x \neq 0$.

Esta es la primera aparición de la ecuación $Ax = b$ en estas notas. Una ecuación de esta forma se denomina indistintamente **sistema de ecuaciones lineales**, **sistema lineal** o **ecuación lineal**. Generalmente se exige que A sea una matriz invertible pues tal condición garantiza una única solución para el siguiente problema: Dados A no singular y un vector compatible b , hallar x tal que $Ax = b$. La existencia y unicidad de solución para el sistema $Ax = b$ se consideran posteriormente.

Proposición 2.13. *Si A es invertible entonces A^T y A^* son invertibles. Sus inversas son*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \text{ y } (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Proposición 2.14. *Una matriz idempotente es la identidad o es singular.*

Demostración. Supongamos que A es idempotente, es decir, $A^2 = A$. Entonces $0 = A(A - I)$. Si $A = I$, se cumple la igualdad. Si $A \neq I$, hay una columna no nula en $A - I$. Si la llamamos x , entonces $Ax = 0$ y por proposición anterior, A es singular. \square

2.4. Nota MATLAB

```
a = gallery('jordbloc',8,4); % bloque de Jordan
c = gallery('moler',8); % matriz simetrica definida positiva
a1 = inv(a); % inversa
g = a'; % traspuesta
p = a*c; % producto de matrices
q = a.*c; % producto componente a componente
h = det(a); % determinante
```

Capítulo 3

Espacios vectoriales

En este capítulo nos concentramos en espacios vectoriales de dimensión finita y lo que se incluye es una breve revisión de conceptos básicos. Para estudiar espacios vectoriales en un contexto más amplio se recomienda [H]. Las principales referencias que consultamos para escribir este capítulo son [HK], [I], [Lang], [L] y [M].

Probablemente el primer libro que se refiere a las propiedades que cumple un espacio vectorial lo publicó Peano en 1888. En ese libro también aparecen por primera vez las operaciones unión e intersección para conjuntos y el signo \in .

Para saber más de esta historia recomendamos

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Abstract_linear_spaces.html

Advertencia: A los elementos de espacios vectoriales se les llama **vectores**.

3.1. Definición

Un espacio vectorial sobre el campo de los números reales es un conjunto V junto con dos operaciones

$$+ : V \times V \longrightarrow V \quad \text{y} \quad \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

tales que

1. $(V, +)$ es un grupo abeliano, es decir:

- La suma es asociativa: $v + (w + z) = (v + w) + z$ para todo $v, w, z \in V$.
- La suma tiene un elemento idéntico: Existe un único vector $0 \in V$ tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para todo $v \in V$.

- Para cada vector $v \in V$ existe un único vector, su inverso aditivo $-v$, tal que $v + (-v) = (-v) + v = 0$.
 - La suma es conmutativa: $v + w = w + v$ para $v, w \in V$.
2. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.
 3. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.
 4. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v, w \in V$.
 5. $1v = v$ para $v \in V$.

3.2. Ejemplos de espacios vectoriales

1. \mathbb{R}^n es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con la suma y el producto por escalar usuales.
2. $\mathbb{R}^{m \times n}$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con la suma y el producto por escalar usuales.
3. V es el conjunto de las funciones f de $[0, 1]$ en \mathbb{R} con la suma y el producto por escalar usuales.
4. El conjunto de los polinomios con coeficientes reales con la suma y el producto por escalar usuales.

3.3. Subespacios

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y sea $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$. El subconjunto W es un subespacio de V si con las operaciones heredadas de V también es un espacio vectorial. De forma equivalente puede decirse que W es un subespacio de V si y solo si $\alpha v + \beta w \in W$ para todo $v, w \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esta definición significa que lo único que debe revisarse es la clausura de las operaciones en el subconjunto.

3.4. Ejemplos de subespacios

1. Para cada espacio vectorial V los subconjuntos $\{0\}$ y V son los subespacios triviales de V .

2. $W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ es simétrica}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{n \times n}$.
3. Supongamos que Y es el conjunto de las funciones continuas f de $[0, 1]$ en \mathbb{R} con la suma y el producto por escalar usuales. Entonces Y es un subespacio del espacio V descrito en 3.2.
4. Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V . El conjunto S puede ser finito o infinito. El conjunto de todas las combinaciones lineales (ver 1.1.6) con elementos de S es un subespacio de V llamado subespacio generado por S y se denota $Sg(S)$ ó $Span(S)$ ó $Sp(S)$.

3.5. Independencia lineal

3.5.1. Conjunto linealmente dependiente (LD)

Un subconjunto S no vacío de un espacio vectorial V se llama **linealmente dependiente** si existen vectores $V_1, V_2, \dots, V_k \in S$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que $\sum_{j=1}^k \alpha_j V_j = 0$. Esto es lo que se llama una combinación lineal no trivial para el vector 0.

3.5.2. Conjunto linealmente independiente (LI)

Un subconjunto S no vacío de un espacio vectorial V se llama **linealmente independiente** si no es linealmente dependiente. En otras palabras, en cualquier combinación lineal del cero $\sum_{j=1}^k \alpha_j V_j = 0$ con vectores $V_1, V_2, \dots, V_k \in S$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, obligatoriamente se cumple que todos los escalares son nulos: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

3.5.3. Ejemplos

1. Si S es un subconjunto de un espacio vectorial V y $0 \in S$, entonces S es un subconjunto linealmente dependiente.
2. En \mathbb{R}^n el conjunto $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de los vectores canónicos (ver 1.1.2, numeral 7) de \mathbb{R}^n es linealmente independiente.

3. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es un subconjunto linealmente independiente de \mathbb{R}^2 .

3.6. Base de un espacio vectorial

Un subconjunto B de un espacio vectorial V es una base de V si

1. B es un subconjunto linealmente independiente de V .
2. $\text{Sg}(B) = V$.

Nota 3.1. En el ejemplo 2 de la lista 3.5.3 describimos la base canónica de \mathbb{R}^n .

Nota 3.2. Existen espacios vectoriales en los que hay bases infinitas. Por ejemplo, el conjunto $B = \{1, x, x^2, \dots\}$ es una base del espacio de los polinomios con coeficientes reales con la suma y el producto por escalar usuales.

Nota 3.3. En lo que sigue, todos los espacios vectoriales con los que se trabaja son finito dimensionales, a no ser que se diga lo contrario.

Teorema 3.4. Sea V un espacio vectorial con bases B_1 y B_2 de n y m elementos respectivamente. Entonces $n = m$.

Demostración. Ver Teorema 3, cap. II de [Lang]. □

Definición 3.5. Sea V un espacio vectorial que tiene una base con n elementos. Al número n se le llama **dimensión** de V y se le denota $\dim(V)$.

Nota 3.6. Se dice que el espacio vectorial trivial $\{0\}$ tiene dimensión 0.

Teorema 3.7. Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Sea W un subespacio distinto de $\{0\}$ de V . Entonces $\dim(W) \leq n$.

Demostración. Ver Teorema 6, cap. II de [Lang]. □

3.7. Sumas e intersecciones de subespacios

Sean W y Y subespacios de un espacio vectorial V .

3.7.1. Suma

La suma de W y Y es $W + Y = \{w + y : w \in W, y \in Y\}$

3.7.2. Intersección

La intersección de W y Y es $W \cap Y = \{x : x \in W \text{ y } x \in Y\}$

Teorema 3.8. *La suma y la intersección de subespacios de un espacio vectorial V son subespacios de V .*

Nota 3.9. *La unión de subespacios de V no necesariamente es un subespacio de V .*

Definición 3.10. *Sean W y Y subespacios de un espacio vectorial V y sea $Z = W + Y$. Si se cumple que $W \cap Y = \{0\}$ se dice que Z es la suma directa de W y Y y se escribe $Z = W \oplus Y$.*

Teorema 3.11. *Sean W y Y subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita V . Supongamos que $Z = W \oplus Y$. Entonces*

1. *Cada $z \in Z$ se escribe de forma única como $z = w + y$ con $w \in W$ y $y \in Y$.*
2. $\dim(Z) = \dim(W) + \dim(Y)$.

Demostración. Ver Theorem 2.26 en [L] y Teorema 6 del capítulo 2 de [HK]. □

Capítulo 4

Sistemas lineales

En este capítulo consideramos la solución de sistemas lineales e introducimos el método **directo** por excelencia que es la **eliminación de Gauss**. Este es el algoritmo básico del álgebra lineal y sirve para resolver exactamente el sistema lineal $Ax = b$ para A matriz no singular. Es más utilizado cuando la matriz A es **densa**, es decir, la mayoría de sus elementos son no nulos.

Para matrices en las que la mayoría de sus elementos son ceros, que son llamadas **ralas** o **poco densas (sparse)**, es más común utilizar métodos **iterativos**. Con estos métodos se pretende **aproximar** la solución del sistema $Ax = b$, no se pretende encontrarla exactamente. Son especialmente útiles cuando las matrices son grandes y ralas. Recomendamos [Layton] para apreciar el efecto llamado **Maldición de la dimensión (Curse of dimensionality)** que es el que obliga a recurrir a estrategias iterativas y [AM] para una introducción a estos métodos.

En [SV] hay un recuento histórico sobre métodos iterativos escrito por dos de los principales investigadores del tema. Se reportan avances en el tema realizados durante el siglo XX. Para una historia de los métodos directos y en particular de la eliminación de Gauss, recomendamos la monografía que Carl D. Meyer ofrece en su página web http://meyer.math.ncsu.edu/Meyer/PS_Files/GaussianEliminationHistory.pdf

Para escribir este capítulo se consultaron [I], [L], [M] y [Ortega].

4.1. Eliminación de Gauss

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$. Interesa conocer condiciones necesarias y suficientes para existencia y unicidad de soluciones para el sistema

$$Ax = b. \tag{4.1}$$

Escrito por filas, el sistema (4.1) es

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

Introducimos la eliminación de Gauss por medio de la demostración de un teorema central a la manera clásica de [Ortega].

Teorema 4.1. *Si $\det(A) \neq 0$ entonces el sistema (4.1) tiene una única solución.*

Demostración. Empezamos demostrando que existe una solución. Supongamos que $a_{11} \neq 0$. Multiplicamos la primera ecuación de (4.2) por $a_{11}^{-1}a_{21}$ y la sustraemos de la segunda ecuación. Enseguida multiplicamos la primera ecuación por $a_{11}^{-1}a_{31}$ y la sustraemos de la tercera ecuación. Continuamos en esta forma hasta llegar al sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \vdots & \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde los $(1)'s$ en los superíndices indican que pudieron haber cambiado. El resultado es que se eliminó la incógnita x_1 de las últimas $n-1$ ecuaciones. El sistema modificado (4.3) y el sistema (4.2) tienen el mismo vector x como solución. Enseguida suponemos que $a_{22}^{(1)} \neq 0$ y repetimos el mismo proceso para el sistema de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas para eliminar la incógnita x_2 de las últimas $n-2$ ecuaciones. La repetición de este procedimiento lleva a un sistema con matriz triangular que tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \vdots & \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

El sistema modificado (4.4) y el sistema (4.2) tienen el mismo vector x como solución. Finalmente, suponemos que $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$. De la última ecuación en (4.4) despejamos para obtener el valor de x_n . Conocido x_n , de la penúltima ecuación, encontramos el valor de x_{n-1} . Continuamos este procedimiento de **sustitución regresiva** (back-substitution) y obtenemos el vector x que es solución del sistema (4.4) y por tanto del sistema original (4.2). Como en cada uno de los pasos de sustitución regresiva la

solución obtenida es única, entonces encontramos una única solución para el sistema (4.2) siempre que los elementos $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$, llamados **pivotes**, sean no nulos. Concluimos la demostración utilizando la hipótesis $\det(A) \neq 0$ para garantizar que siempre se pueden encontrar pivotes no nulos. Supongamos que $a_{11} = 0$. Buscamos en la primera columna un elemento no nulo, digamos a_{k1} e intercambiamos las filas 1 y k en los dos lados de la igualdad (4.2). El elemento no nulo de la primera columna existe porque si la columna fuera nula entonces $\det(A) = 0$. El sistema con las filas intercambiadas tiene la misma solución x que el sistema original excepto el orden de las componentes en el vector x . Más precisamente, si pensamos en (4.2) como un sistema de n ecuaciones, el sistema con dos ecuaciones intercambiadas tiene las mismas soluciones que el sistema original. Para considerar el análogo al sistema reducido (4.3), hacemos el mismo razonamiento. Si $a_{22}^{(1)} = 0$, escogemos un elemento no nulo, digamos $a_{k2}^{(1)}$ con $k > 2$, e intercambiamos las filas 2 y k . La existencia del elemento no nulo en las filas siguientes a la segunda de la segunda columna de (4.3) se justifica de nuevo por la hipótesis $\det(A) \neq 0$. Si la columna 1 de la submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de A , consistente en las filas $2, \dots, n$ y las columnas $2, \dots, n$, fuera nula, entonces el determinante de la submatriz sería 0 y por la expansión en cofactores (2.1) para la columna 1 de la matriz en (4.3), se tendría $\det(A) = 0$. Debe tenerse en cuenta que si hay intercambios de filas el determinante cambia a lo sumo en el signo. Este argumento se puede continuar y concluir que los pivotes $a_{ii}^{(i-1)}$, $i = 3, \dots, n$ son no nulos o se pueden hacer no nulos por intercambio de filas. \square

Enseguida relacionamos vectores canónicos con inversas de matrices y sistemas lineales.

Consideremos de nuevo el sistema (4.1) y supongamos que $\det(A) \neq 0$. Ahora definamos n sistemas lineales

$$Ax^{(i)} = e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Basados en el teorema (4.1), estos sistemas tienen únicas soluciones $x^{(i)}$ para cada i . La matriz $C = (x^{(1)}x^{(2)} \dots x^{(n)})$ que tiene estas soluciones como columnas, cumple

$$AC = I. \quad (4.6)$$

Por numeral 7 de Teorema 2.10, $1 = \det(I) = \det(A)\det(C)$ y como $\det(A) \neq 0$ entonces $\det(C) \neq 0$.

Lo que hacemos ahora es plantear sistemas de la forma (4.5) para la matriz C que tiene determinante no nulo. Llegamos a una matriz X tal que

$$CX = I. \quad (4.7)$$

Al premultiplicar (4.7) por A y usar asociatividad, encontramos que $X = A$. Recordando la definición y la unicidad de la inversa de una matriz, concluimos que $C = A^{-1}$. De manera que hemos demostrado

Teorema 4.2. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si $\det(A) \neq 0$ entonces A es no singular.*

Nota 4.3. *Si $Ax = b$ y $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución dada por*

$$x = A^{-1}b.$$

Aunque de importancia teórica, esta expresión no proporciona un método práctico para encontrar la solución de una ecuación lineal.

Teorema 4.4. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si A es no singular, entonces $\det(A) \neq 0$.*

Demostración. Suponemos que existe la inversa (única) A^{-1} de A la cual cumple

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Tomando determinante, $1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$. Ninguno de estos factores puede ser nulo, en particular, $\det(A) \neq 0$. \square

4.2. Formulación matricial de la eliminación de Gauss

En esta sección introducimos las factorizaciones $A = LU$ y $PA = LU$ con L triangular inferior con unos en la diagonal, U triangular superior y P matriz de permutación. Estas factorizaciones sirven para formular matricialmente la eliminación de Gauss.

Empezamos por el caso más sencillo de la eliminación de Gauss, es decir, todos los divisores en el proceso son no nulos y no se necesitan intercambios de filas. Los cálculos que llevan al sistema (4.3) se pueden escribir en términos de matrices como

$$L^{(1)}Ax = L^{(1)}b,$$

donde

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -l_{21} & 1 & & & \\ -l_{31} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -l_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

con $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = 2, \dots, n$.

El paso k se realiza por premultiplicación por la matriz

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & -l_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & -l_{n,k} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

donde $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$, $i = k + 1, \dots, n$.

El sistema triangular (4.4) se puede escribir

$$\widehat{L}Ax = \widehat{L}b, \quad \text{con } \widehat{L} = L^{(n-1)} \dots L^{(2)}L^{(1)}. \quad (4.10)$$

La matriz \widehat{L} es triangular inferior con unos en su diagonal. Sea U la matriz triangular superior del sistema (4.4). El trabajo anterior indica que $\widehat{L}A = U$. La matriz \widehat{L} tiene determinante 1, por tanto es no singular. Su inversa $L = \widehat{L}^{-1}$ también es triangular inferior con unos en su diagonal y cumple que

$$A = LU. \quad (4.11)$$

En 1.1.2, numeral 6, definimos matriz de permutación y ese es precisamente el concepto que requerimos ahora. Si P es una matriz de permutación, se puede pensar de P como la matriz que se obtiene de la identidad I por permutación de dos de sus filas, digamos las filas j y k . El producto PA es la matriz que se obtiene de A por intercambio de sus filas j y k .

Volvemos a la eliminación de Gauss y su formulación matricial. Si un divisor es cero, se necesita un intercambio de filas de A . Supongamos que $a_{11} = 0$ y que la primera fila se debe intercambiar con la fila k . La nueva matriz es $P^{(1)}A$, donde $P^{(1)}$ es una matriz de permutación. La matriz $L^{(1)}$ de (4.8) con los elementos de A sustituidos por los de $P^{(1)}A$, premultiplica a $P^{(1)}A$ o sea $L^{(1)}P^{(1)}A$.

Para el segundo paso, si $a_{22}^{(1)} = 0$, se requiere una permutación $P^{(2)}$ y el resultado es $P^{(2)}L^{(1)}P^{(1)}A$. Finalmente se obtiene la expresión similar a (4.10) dada por

$$\widehat{L}Ax = \widehat{L}b, \quad \widehat{L} = L^{(n-1)}P^{(n-1)} \dots L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}P^{(1)} \quad (4.12)$$

En esta expresión $P^{(i)} = I$ si no se requirió intercambio en dicho paso. Las matrices $L^{(i)}$ son triangulares inferiores con unos en la diagonal pero \widehat{L} no tiene que ser triangular inferior. Lo que si se sabe es que \widehat{L} es invertible por ser producto de matrices invertibles y entonces se puede escribir

$$A = \widehat{L}^{-1}U \quad (4.13)$$

que es análogo a (4.11) aunque \widehat{L}^{-1} no tiene que ser triangular inferior.

Teorema 4.5. *Si A es una matriz invertible de $\mathbb{R}^{n \times n}$ entonces existe una matriz de permutación P tal que*

$$PA = LU \quad (4.14)$$

donde L es triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular inferior.

Demostración. Supongamos que en el paso i se requiere intercambio con la fila k . Si a la matriz original A se le hubieran intercambiado las filas i y k antes de empezar la eliminación, en el paso i habríamos encontrado el elemento diagonal no nulo que requerimos. La estrategia es entonces la siguiente: Realicemos la eliminación de Gauss completa en la matriz A y registremos los intercambios de fila que se necesitaron. Agrupemos dichos intercambios en la matriz de permutación P . El resultado de la eliminación con intercambios es el mismo que el de la eliminación sin intercambios pero realizado a la matriz PA . Por tanto

$$PA = LU.$$

□

Ejemplo 4.6. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En la eliminación de Gauss se necesita intercambiar filas 2 y 3 para poder finalizarla. Sea

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El producto PA es

$$PA = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la eliminación de Gauss de PA no requiere intercambios y usa los multiplicadores $l_{21} = -\frac{1}{4}$, $l_{31} = -\frac{1}{2}$ y $l_{41} = -\frac{1}{4}$. Dicha eliminación lleva a la matriz

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1/4 & 1 & & \\ 1/2 & 0 & 1 & \\ 1/4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es tal que $PA = L^{(1)}U$.

Nota 4.7. Se acostumbra omitir los elementos nulos de las matrices siempre que no haya confusión.

4.3. Nota MATLAB

Tomado de la ayuda de MATLAB al invocar `doc lu`

$$a = [1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 0];$$

$$[l, u, p] = lu(a);$$

Las matrices que resultan son:

$$l = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/7 & 1 & \\ 4/7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ & 6/7 & 3 \\ & & 9/2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que se hubiera podido realizar eliminación de Gauss sin intercambio de filas. Aquí aparecen intercambios debido a la estrategia de pivoteo parcial.

4.4. Invertibilidad

Terminamos esta sección con algunas equivalencias para invertibilidad de matrices.

Teorema 4.8. Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\det(A) \neq 0$.
2. Hay una matriz $n \times n$ denotada A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
3. $Ax = b$ tiene una única solución para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
4. $Ax = 0$ tiene solamente la solución trivial $x = 0$.
5. Las columnas (filas) de A son linealmente independientes.

Demostración. Ya se demostró la equivalencia de 1. y 2. y que 1. implica 3. Además, 4. es un caso particular de 3. Veamos la equivalencia de 4. y 5. para columnas. Escribimos A por columnas en la forma

$$A = (A_{*1} \quad A_{*2} \quad A_{*n}).$$

La ecuación $Ax = 0$ se escribe

$$0 = Ax = \sum_{i=1}^n x_i A_{*i}.$$

Si se cumple 4. entonces las columnas de A son linealmente independientes. Recíprocamente, si las columnas de A son LI entonces $Ax = 0$ tiene una única solución que es la trivial $x = 0$.

La condición para las filas es consecuencia de la igualdad $\det(A) = \det(A^T)$. Finalizamos la demostración probando que 4. implica 1. Supongamos que se cumple 4. pero $\det(A) = 0$. Por ser nulo el determinante, el proceso de eliminación de Gauss lleva a una matriz reducida de la forma

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * & \cdots & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & * & * & \cdots & \cdots & * \\ & & & 0 & * & \cdots & * \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & a & B \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Los asteriscos indican elementos que pueden ser no nulos y en la columna $k - \text{ésima}$ el elemento diagonal y todos los que hay debajo son cero. Nótese que si $k = 1$, la primera columna de A es nula y así $Ae_1 = 0$, lo cual contradice 4. Por consiguiente $k \geq 2$.

La matriz $A^{(1)}$ es triangular superior, invertible, de tamaño $(k - 1) \times (k - 1)$, a es un vector de tamaño $(k - 1)$, B es $(k - 1) \times (n - k)$ y C es $(n - k + 1) \times (n - k)$. El sistema $A^{(1)}x^{(1)} = a$ tiene solución $x^{(1)}$, por tanto

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} & a & B \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)}x^{(1)} - a \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Esto significa que hay un vector no nulo \hat{x} tal que $\hat{A}\hat{x} = 0$. Pero, de acuerdo con (4.12),

$$\hat{A} = L^{(k-1)}P^{(k-1)} \dots L^{(1)}P^{(1)}A$$

donde las matrices $L^{(i)}$ son las matrices triangulares inferiores y las matrices $P^{(i)}$ son las matrices de permutación que surgen en la eliminación de Gauss. Tenemos:

$$0 = \hat{A}\hat{x} = L^{(k-1)}P^{(k-1)} \dots L^{(1)}P^{(1)}A\hat{x}.$$

Como las matrices $L^{(i)}$ y $P^{(i)}$ son invertibles, entonces $A\hat{x} = 0$. Como $\hat{x} \neq 0$, esto es una contradicción. \square

Nota 4.9. Hay otras equivalencias para la no singularidad de una matriz y también hay otros métodos de demostración, por ejemplo aquellos basados en valores propios.

4.5. Nota MATLAB

```
a = [4,4,4,4;2,2,2,2;1,0,1,0;1,1,1,1];
[1,u,p] = lu(a);
```

Este código MATLAB permite encontrar las matrices que aparecen arriba. Debe tenerse en cuenta que la rutina `lu` de MATLAB aplica por defecto la estrategia de **pivoteo parcial** que consiste en que en la $j - \text{ésima}$ columna, de la posición (j, j) hacia abajo, se escoge como pivote el primer elemento no nulo que tiene el mayor valor absoluto de esa parte de la columna.

Capítulo 5

Forma escalonada reducida y rango

Este capítulo trata de eliminación de Gauss para matrices rectangulares y para matrices cuadradas que no tienen que ser invertibles. Empezamos con la forma escalonada por filas y la definición de las tres operaciones elementales fila de las cuales dos se han usado ya antes. Después llegamos a la forma escalonada reducida por filas a la definición de rango que es una de las que más se usarán en el resto del manuscrito. Para escribir este capítulo consultamos principalmente [M], [L] y [Ortega].

Consideremos $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. En el caso rectangular también podemos aplicar eliminación de Gauss con intercambio de filas pero se puede presentar la situación siguiente: el elemento diagonal es cero y todos los elementos debajo de él en la misma columna también son nulos. En tal caso, se debe pasar a la siguiente columna en la misma fila y continuar el proceso. Se llega a la siguiente **eliminación modificada de Gauss**:

Suponga que U es la matriz que se obtiene después de completar $i - 1$ pasos de la eliminación. Para ejecutar el paso $i - \text{ésimo}$, se siguen las siguientes instrucciones:

1. Mirando de izquierda a derecha en U , localizar la primera columna que contiene un elemento no nulo en la fila i o debajo de ella. La llamamos U_{*j} .
2. El pivote para el paso i es el elemento de la posición (i, j) .
3. De ser necesario, se intercambia la fila i con una fila inferior para traer un número distinto de cero a la posición (i, j) y después, se anulan los elementos de las posiciones inferiores a la del pivote (i, j) .
4. Si la $i - \text{ésima}$ fila de U y todas las que están debajo son nulas, el proceso está completo.

Definición 5.1. Se dice que una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con filas A_{i*} y columnas A_{*j} , está en forma escalonada por filas (row echelon form), si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. Si A_{i*} es una fila nula, entonces todas las filas debajo de ella también son nulas.
2. Si el primer elemento no nulo de A_{i*} está en la posición j , entonces todos los elementos debajo de la posición i en las columnas $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*j}$ son nulos.

Las matrices en forma escalonada por filas tienen la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * & * \\ & & & & & & * & * \end{pmatrix}$$

5.1. Operaciones elementales

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Las siguientes operaciones sobre las filas A_{i*} de A se denominan operaciones elementales. Se pueden definir las operaciones análogas sobre las columnas de la matriz.

1. E1: Intercambio de las filas i y j .
2. E2: Reemplazar la fila i por un múltiplo escalar no nulo de ella misma.
3. E3: Reemplazar la fila j por $A_{j*} + \beta A_{i*}$ con $\beta \neq 0$.

Nota 5.2. Hasta ahora hemos utilizado operaciones E1 y E3 en la eliminación de Gauss y en la construcción de formas escalonadas por filas. Para llegar a formas escalonadas reducidas por filas, necesitamos también operaciones de tipo E2.

Definición 5.3. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ está en forma escalonada reducida por filas (reduced row echelon form) si se cumplen las siguientes condiciones:

1. A está en forma escalonada por filas.
2. El primer elemento de cada fila no nula es un uno.

3. Todos los elementos encima de cada pivote en su misma columna son ceros.

Las matrices en forma escalonada reducida por filas tienen la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ & & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ & & & 1 & * & * & 0 & * \\ & & & & & & 1 & * \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Usando solamente operaciones elementales de tipo $E1$ y $E3$, realizamos el siguiente proceso de eliminación que no tiene estrategias de pivoteo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para obtener la forma escalonada reducida, hacemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquí usamos operaciones elementales de tipos $E2$ y $E3$.

Nota 5.5. Para una matriz invertible A su forma escalonada reducida es la matriz identidad. El proceso de eliminación en este caso se denomina de Gauss Jordan. Se caracteriza por la utilización de operaciones $E2$ para la obtención de los unos de la diagonal.

5.2. Matrices elementales

Las matrices de la forma

$$I - uv^T, \tag{5.1}$$

con u y v vectores de \mathbb{R}^n tales que $v^T u \neq 1$, se denominan **matrices elementales**. Siempre son invertibles, sus inversas tienen la forma

$$(I - uv^T)^{-1} = I - \frac{uv^T}{v^T u - 1} \quad (5.2)$$

y por tanto también son matrices elementales.

La relación de estas matrices con las operaciones elementales definidas en (5.1) es la siguiente: El resultado de realizar una operación elemental de alguno de los tres tipos en la matriz identidad, es una matriz elemental. Para ilustrarlo, proponemos lo que ocurre con matrices 3×3 .

1. Al realizar una operación E1 en I , consistente en intercambiar filas 1 y 2, se obtiene

$$S^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $S^{(1)} = I - vv^T$, donde $v = e_1 - e_2$.

2. Al realizar una operación E2 en I , consistente en multiplicar su segunda fila por un escalar β , se obtiene

$$S^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $S^{(2)} = I - (1 - \beta)e_2e_2^T$.

3. Al realizar una operación E3 en I , consistente en tomar β veces la fila 1 y sumarla a la fila 3, se obtiene

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $S^{(3)} = I + \beta e_3e_1^T$.

Proposición 5.6. *Propiedades de las matrices elementales*

1. Si una matriz A se pre-multiplica por una matriz elemental Q la matriz resultante es la matriz A con sus filas modificadas de acuerdo con la operación elemental asociada con Q .

2. Si una matriz A se post-multiplica por una matriz elemental Q , la matriz resultante es A con sus columnas modificadas de acuerdo con la operación elemental asociada a Q .

Teorema 5.7. *La matriz cuadrada A es invertible si y solo si es un producto de matrices elementales.*

Demostración. Si A es invertible, entonces por medio de eliminación de Gauss Jordan (Nota 5.5) en la que se usan solamente operaciones elementales fila se puede llegar a la matriz identidad. Si las matrices elementales asociadas con esas operaciones elementales se denotan Q_i , entonces

$$I = Q_k Q_{k-1} \cdots Q_2 Q_1 A.$$

Por tanto $A = (Q_k Q_{k-1} \cdots Q_2 Q_1)^{-1} = Q_1^{-1} Q_2^{-1} \cdots Q_k^{-1}$ que es un producto de matrices elementales. \square

Definición 5.8. *Equivalencia*

Si una matriz B se puede obtener de una matriz A por medio de operaciones elementales fila y columna se escribe $A \sim B$ y se dice que A es equivalente a B . Esto lo podemos reescribir así: $A \sim B$ si y solo si hay matrices invertibles Q_1 y Q_2 tales que $Q_1 A Q_2 = B$.

Nota 5.9. 1. Si todas las operaciones elementales se hacen en las filas entonces $Q_2 = I$ y si todas las operaciones elementales se hacen en las columnas entonces $Q_1 = I$.

2. Como las matrices Q_1 y Q_2 son invertibles entonces $A \sim B$ si y solo si $B \sim A$.

3. También se da $A \sim A$.

4. Finalmente, también se da la transitividad $A \sim B$ y $B \sim C \implies A \sim C$.

5. Los tres numerales anteriores indican que \sim es una relación de equivalencia.

Proposición 5.10. *Para cada matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hay una única forma escalonada reducida por filas. Se denota E_A .*

Demostración. La demostración puede leerse en el Example 3.9.2 de [M]. \square

Nota 5.11. *La unicidad de la forma escalonada reducida de A implica la unicidad de las posiciones para los pivotes y por tanto también quedan unívocamente determinados el número de pivotes y el número de columnas de A que contienen las posiciones de los pivotes.*

Definición 5.12. A las columnas de A (E_A) que contienen las posiciones de los pivotes se les llama **columnas básicas de A** (E_A). A las demás columnas de A (E_A) se les llama **columnas no básicas**.

Definición 5.13. Para cada matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ el número de filas no nulas en su forma escalonada reducida se denomina rango (rank) de A y se denota $\text{rank}(A)$.

Nota 5.14. El rango es un protagonista en estas notas. Utilizaremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) &= \text{número de pivotes} \\ &= \text{número de filas no nulas en } E_A \\ &= \text{número de columnas básicas de } A. \end{aligned}$$

5.3. Relación entre columnas y filas

Proposición 5.15. Si $A \sim B$ por filas entonces las relaciones lineales entre columnas de A también se dan entre las columnas de B . Es decir,

$$B_{*k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{*j} \text{ si y solo si } A_{*k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j A_{*j}.$$

En particular, las relaciones entre las columnas de A y E_A son las mismas de manera que las columnas no básicas de A son combinaciones lineales de las columnas básicas de A .

Si $A \sim B$ por columnas, entonces las relaciones lineales entre filas de A también se dan entre las filas de B .

Demostración. Si $A \sim B$ por filas entonces $QA = B$ para una matriz invertible Q . La j -ésima columna de B es

$$B_{*j} = (QA)_{*j} = QA_{*j}.$$

Luego, si

$$A_{*k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j A_{*j}$$

entonces

$$QA_{*k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j QA_{*j}$$

que corresponde a

$$B_{*k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{*j}.$$

Recíprocamente, si $B_{*k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{*j}$ entonces la multiplicación por Q^{-1} lleva a $A_{*k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j A_{*j}$. \square

Nota 5.16. Para A y E_A la situación es: Cada columna no básica E_{*k} de E_A es una combinación lineal de las j columnas básicas que hay a la izquierda de E_{*k} . Los coeficientes que se necesitan son las primeras j componentes de E_{*k} . Por la proposición anterior también es verdadero lo siguiente:

Cada columna no básica A_{*k} de A es una combinación lineal de las j columnas básicas que hay a la izquierda de A_{*k} . Los coeficientes que se necesitan son las primeras j componentes de E_{*k} .

Corolario 5.17. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Las columnas básicas de A son un conjunto LI.

Demostración. Escribimos a A por columnas

$$A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n)$$

y suponemos que el conjunto de columnas básicas de A es $\{A_{r_1}, A_{r_2}, \dots, A_{r_k}\}$. El conjunto correspondiente en E_A es $\{Q_{r_1}, Q_{r_2}, \dots, Q_{r_k}\}$. \square

Demostración. Sea

$$0 = \sum_{i=1}^k \beta_i A_{r_i}$$

una CL del cero con las columnas básicas de A . Por proposición anterior, $0 = \sum_{i=1}^k \beta_i Q_{r_i}$. Por el desfase de los unos en E_A , esto obliga $\beta_i = 0$ para todo i . \square

Nótese que si la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se escribe por columnas, es decir, $A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n)$ y T es el conjunto de las columnas básicas de A , entonces $Sg(T) = Sg(\{A_1, A_2, \dots, A_n\})$.

Definición 5.18. Sea $A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. El subespacio de \mathbb{R}^m dado por $Sg(\{A_1, A_2, \dots, A_n\})$ se denomina rango (range) de A o **espacio columna** de A o **imagen** de A y se denota $R(A)$. Por corolario 5.17, $\dim R(A) = \text{rank}(A)$.

Nota 5.19. Si $w \in R(A)$ entonces $w = \sum_{j=1}^n r_j A_j = Ar$ donde $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$. Esto explica el nombre imagen de la definición anterior.

5.4. Forma normal del rango

Utilizando operaciones elementales fila y columna, se puede demostrar lo siguiente:

Proposición 5.20. Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $\text{rank}(A) = r$, entonces

$$A \sim N_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

N_r se denomina **forma normal del rango** (rank normal form). Es la matriz más simplificada a la que se puede llegar por medio de operaciones elementales.

Demostración. Se sabe que $A \sim E_A$ por filas y esto significa que existe una matriz no singular P tal que $PA = E_A$. Las r columnas básicas de E_A son vectores canónicos. Si se intercambian columnas hasta que estos vectores canónicos queden en la posición superior izquierda, es porque hay una matriz no singular Q_1 tal que

$$PAQ_1 = E_A Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar ambos lados por

$$Q_2 = \begin{pmatrix} I_r & -M \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

llegamos a

$$PAQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} I_r & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -M \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $A \sim N_r$. □

Terminamos este capítulo con dos proposiciones que facilitan el trabajo con el rango.

Proposición 5.21. *Si A y B son matrices $m \times n$ entonces:*

1. $A \sim B$ si y solo si $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$. En particular, multiplicación por matriz invertible genera una matriz con el mismo rango (rank).
2. $A \sim B$ por filas si y solo si $E_A = E_B$.
3. $A \sim B$ por columnas si y solo si $E_{A^T} = E_{B^T}$.

Demostración. Ver [M] pag. 138. □

Proposición 5.22. *La trasposición no cambia el rango. Es decir, si A es una matriz $m \times n$ entonces*

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) \quad \text{y} \quad \text{rank}(A) = \text{rank}(A^*).$$

Demostración. Ver [M] pag. 139. □

Capítulo 6

Matrices y transformaciones lineales

Las transformaciones lineales, también llamadas funciones lineales, operadores lineales y homomorfismos, son las funciones entre espacios vectoriales que *respetan* la suma y el producto por escalar. Veremos que las matrices se pueden identificar como transformaciones lineales aunque el estudio de matrices se puede hacer sin recurrir a dicha identificación (ver por ejemplo, [I].) Nuestra aproximación está basada en [L] y también consultamos [M] y [Ortega]. Los principales temas que tratamos son: definición, representación matricial de una transformación lineal y los cuatro subespacios fundamentales de una transformación lineal y por tanto de una matriz.

Antes de empezar el desarrollo del tema, advertimos que siempre que mencionemos un espacio vectorial será de dimensión finita y el campo asociado será el de los números reales.

6.1. Definición

Sean V y W espacios vectoriales. Entonces $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal (TL) de V a W si se cumple

$$T(\beta x + \rho y) = \beta T(x) + \rho T(y) \text{ para todo } \beta, \rho \in \mathbb{R} \text{ y todo } x, y \in V.$$

Ejemplo 6.1. 1. La función $0 : V \rightarrow W$ tal que para todo $v \in V$, $0(v) = 0$ es una TL.

2. La función idéntica $i : V \rightarrow V$ tal que para todo $v \in V$, $i(v) = v$ es una TL.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida así: $T(v) = Av$ es una transformación lineal pues $T(\beta x + \rho y) = A(\beta x + \rho y) = \beta Ax + \rho Ay = \beta T(x) + \rho T(y)$.

Cuando no hay confusión, se omite el paréntesis en $T(v)$ y se escribe simplemente Tv .

6.2. Representación matricial

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una TL y supongamos que $B_1 = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ y $B_2 = \{W_1, W_2, \dots, W_m\}$ son bases de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente. Definimos la representación matricial de T en las bases B_1 y B_2 como la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

cuyas componentes cumplen que $TV_i = \sum_{k=1}^m a_{ki} W_k$ para cada $i = 1, \dots, n$. Es decir, la columna i -ésima de A está conformada por los (únicos) coeficientes que permiten escribir TV_i como combinación lineal de los elementos de la base B_2 de \mathbb{R}^m . Definamos las matrices de las bases así:

$$C = (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n), \quad F = (W_1 \ W_2 \ \dots \ W_m)$$

y denotemos A_{*i} a la columna i -ésima de A , es decir,

$$A_{*i} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \text{ y } A = (A_{*1} \ A_{*2} \ \dots \ A_{*n}).$$

Puede verse que $TV_i = FA_{*i}$.

Por supuesto la matriz A depende de las bases B_1 y B_2 . Además, dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$, con escritura (única) en términos de la base B_1 dada por

$$v = \sum_{j=1}^n \rho_j V_j$$

entonces Tv queda determinado por el valor de T en los elementos de la base ya que

$$Tv = \sum_{j=1}^n \rho_j TV_j. \text{ Denotemos } x = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix}. \text{ Entonces } v = Cx \text{ y}$$

$$TCx = Tv = \sum_{j=1}^n \rho_j TV_j = \sum_{j=1}^n \rho_j FA_{*j} = F \sum_{j=1}^n \rho_j A_{*j} = FAx. \quad (6.2)$$

Como esto es válido para todo x pues es válido para todo v , desearíamos concluir que TC es igual a FA , pero debemos ser cuidadosos pues no disponemos de una definición para TC . Si las bases B_1 y B_2 son las bases canónicas respectivas, entonces C y F son matrices identidad y la igualdad que nos gustaría obtener es $T = A$ pero de nuevo, falta significado para una igualdad como ésta.

La forma correcta de considerar a las matrices como transformaciones lineales es a través de la transformación lineal T definida en el numeral 3 del ejemplo 6.1 como $Tv = Av$. A esta TL también la llamamos A y se habla indistintamente de la matriz A o de la transformación lineal A . Afortunadamente pensar en A como TL y como matriz casi nunca genera confusión. A manera de resumen proponemos la siguiente equivalencia:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \iff A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ es la TL que a cada } x \in \mathbb{R}^n \text{ asigna } Ax. \quad (6.3)$$

6.3. Composición y subespacios asociados

6.3.1. Composición de transformaciones lineales

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ con sus transformaciones lineales asociadas

$$\begin{array}{l} A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x \longmapsto Ax \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} B : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto Bx \end{array} .$$

La composición de A y B , que esquemáticamente se acostumbra escribir

$$\begin{array}{ccccc} & B & & A & \\ \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & Bx & \longmapsto & ABx, \end{array}$$

es la TL

$$\begin{array}{l} C \\ \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x \longmapsto Cx = ABx. \end{array}$$

La matriz de la TL C es AB .

6.3.2. Subespacios asociados

Sea $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la transformación lineal asociada con la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definición 6.2. El rango de A , denotado $R(A)$, es

$$R(A) = \{w \in \mathbb{R}^m : w = Av \text{ para algún } v \in \mathbb{R}^n\}. \quad (6.4)$$

Esta definición coincide con la definición 5.18 pues los vectores de la forma Av son las combinaciones lineales de las columnas de A .

Definición 6.3. El espacio nulo de A , denotado $\ker(A)$, es

$$\ker(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0\}.$$

Al espacio nulo de A también se le llama núcleo (kernel) de A .

Teorema 6.4. El rango de A es un subespacio de \mathbb{R}^m y el espacio nulo de A es un subespacio de \mathbb{R}^n .

Demostración. Sean $w, z \in R(A)$ y sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $Ax = w$ y $Ay = z$. Entonces $\alpha w + \beta z = \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y)$. Luego $\alpha w + \beta z \in R(A)$. Para el espacio nulo, sean $z, w \in \ker(A)$. Entonces $Az = 0$ y $Aw = 0$. El elemento $\alpha z + \beta w$ es tal que $A(\alpha z + \beta w) = \alpha Az + \beta Aw = 0 + 0 = 0$. Luego $\alpha z + \beta w \in \ker(A)$. \square

6.4. Ortogonalidad

Sea $R = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ un subconjunto de vectores no nulos de \mathbb{R}^n . Se dice que R es **ortogonal** si $V_i^T V_j = 0$ para $i \neq j$ y **ortonormal** si $V_i^T V_j = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es el delta de Kronecker, es decir,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Definición 6.5. Sea S un subespacio de \mathbb{R}^n . El **complemento ortogonal** de S , denotado S^\perp , se define así:

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v^T s = 0 \text{ para todo } s \in S\}.$$

Teorema 6.6. Sean R, S subespacios de \mathbb{R}^n . Entonces

1. El complemento ortogonal de S es un subespacio de \mathbb{R}^n .
2. $S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^n$.

3. $(S^\perp)^\perp = S$.
4. R es un subespacio de S si y solo si S^\perp es un subespacio de R^\perp .
5. $(R + S)^\perp = R^\perp \cap S^\perp$.
6. $(R \cap S)^\perp = R^\perp + S^\perp$.

Teorema 6.7. Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Entonces

1. $\ker(A)^\perp = R(A^T)$.
2. $R(A)^\perp = \ker(A^T)$.

Demostración. Demostremos la parte 2. $x \in R(A)^\perp \iff (Ay)^T x = 0$ para todo $y \iff y^T A^T x = 0$ para todo $y \iff A^T x = 0 \iff x \in \ker(A^T)$. \square

6.5. Cuatro subespacios fundamentales

Los cuatro subespacios fundamentales de la transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de rango $\text{rank}(A) = r$, son: $R(A)$, $R(A)^\perp$, $\ker(A)$ y $\ker(A)^\perp$. Por teorema 6.7, teorema 6.6 y proposición 5.22,

$$r = \dim R(A) = \dim R(A^T) = \dim \ker(A)^\perp$$

y

$$n - r = \dim R(A)^\perp = \dim \ker(A^T).$$

Teorema 6.8. Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Entonces

$$n = \dim \ker(A) + \text{rank}(A) = \dim \ker(A) + \dim R(A).$$

Demostración. Por teorema 6.6, $n = \dim \ker(A) + \dim \ker(A)^\perp$. Por teorema 6.7, $\ker(A)^\perp = R(A^T)$ y por proposición 5.22, $\dim R(A^T) = \dim R(A) = \text{rank}(A)$. \square

Definición 6.9. Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Decimos que A es **sobreyectiva** o **sobre** si $R(A) = \mathbb{R}^m$. Decimos que A es **inyectiva** o **1-1** si $Ax = Ay \implies x = y$ para todo par de vectores x, y en \mathbb{R}^n .

Una formulación equivalente de inyectividad es: A es inyectiva si y solo si $\ker(A) = \{0\}$ y por tanto $\dim \ker(A) = 0$.

Teorema 6.10. Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Entonces

1. $R(AB) \subseteq R(A)$ y si B tiene filas LI entonces $R(AB) = R(A)$.
2. $\ker(B) \subseteq \ker(AB)$ y si A tiene columnas LI entonces $\ker(B) = \ker(AB)$.

Demostración. 1. Si $y \in R(AB)$, $y = ABx$ y así $y \in R(A)$. Si B tiene filas LI, B^T tiene columnas LI.

$$\text{rank}(B) = \text{rank}(B^T) = n$$

y por tanto $R(B) = \mathbb{R}^n$. Si $y \in R(A)$ entonces $y = Ax$ para algún $x \in \mathbb{R}^n = R(B)$ o sea $y \in R(AB)$.

2. Si $x \in \ker(B)$, $Bx = 0$, luego $ABx = 0$ y así $x \in \ker(AB)$. Si A tiene columnas LI, $R(A) = \mathbb{R}^n$, $\text{rank}(A) = n$ y $\ker(A) = \{0\}$. De manera que si $ABx = 0$ es porque $Bx = 0$.

□

Finalizamos este capítulo con las definiciones de valores y vectores propios que serán importantes posteriormente.

6.6. Valores y vectores propios

Para una matriz cuadrada A , los escalares λ y los vectores $x \neq 0$ que satisfacen

$$Ax = \lambda x$$

se denominan **valores y vectores propios** de A respectivamente. Cada pareja (λ, x) se denomina par propio o pareja propia de A . El conjunto de todos los valores propios de A se denomina **Espectro** de A y se denota $\sigma(A)$. Se cumple:

1.
$$\lambda \in \sigma(A) \iff A - \lambda I \text{ es singular} \iff \det(A - \lambda I) = 0. \quad (6.5)$$

- 2.

$$\{x \neq 0 : x \in \ker(A - \lambda I)\}$$

es el conjunto de los vectores propios asociados con λ . Al subespacio $\ker(A - \lambda I)$ se le llama **subespacio propio** de A asociado con el valor propio λ .

En general el espectro de A contiene números complejos aun en el caso en que A sea real. Es que la búsqueda de valores propios se hace resolviendo la ecuación

$$p_\lambda(t) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (6.6)$$

que es un polinomio en λ con coeficientes reales si A es real y complejos si A es compleja.

El polinomio (6.6) se denomina polinomio característico de A .

Finalmente, el radio espectral de A , denotado $\rho(A)$, se define como

$$\rho(A) = \text{máx} \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}, \quad (6.7)$$

es decir, es el máximo valor absoluto o módulo en el espectro de A .

6.7. Nota MATLAB

```
a = gallery('fiedler',8,1:5);  
[v,d] = eig(a);% valores y vectores propios
```


Capítulo 7

Normas de vectores y matrices

En álgebra lineal numérica es de especial importancia tener una idea del tamaño de una perturbación o de un error. De hecho uno de los asuntos que se estudian es el condicionamiento, es decir, si en un problema los datos se perturban, ¿qué tan grande es la diferencia entre la solución exacta del problema y la solución calculada? Si esta diferencia se parece a la perturbación en los datos, se habla de buen condicionamiento y si es muy grande en comparación con la perturbación, se habla de mal condicionamiento.

Para medir vectores y matrices se usan normas. En este capítulo definimos y describimos las principales normas. Para escribirlo consultamos principalmente [I], [M] y [vdG].

7.1. Valor absoluto

Si $\beta \in \mathbb{R}$ su valor absoluto es

$$|\beta| = \begin{cases} \beta, & \text{si } \beta \geq 0 \\ -\beta, & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

Si $\beta \in \mathbb{C}$ su valor absoluto o módulo se define así: Sea $\beta = b_1 + ib_2$. Entonces,

$$|\beta| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{\bar{\beta}\beta}$$

donde $\bar{\beta}$ es el conjugado de β , es decir, $\bar{\beta} = b_1 - ib_2$.

El valor absoluto de números complejos o reales tiene las siguientes propiedades:

1. $\beta \neq 0 \implies |\beta| > 0$. El valor absoluto es definido positivo.

2. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$. El valor absoluto es homogéneo.
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$. El valor absoluto satisface la desigualdad triangular.

7.2. Normas de vectores

La noción de norma es la extensión del valor absoluto para vectores.

7.2.1. Definición

Sea $N : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces N es una norma vectorial si para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$,

1. $x \neq 0 \implies N(x) > 0$. La norma es definida positiva.
2. $N(\beta x) = |\beta| N(x)$. La norma es homogénea.
3. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$. La norma satisface la desigualdad triangular.

7.2.2. Observaciones

1. La norma vectorial en \mathbb{R}^n se define de la misma manera.
2. Si N es una norma en \mathbb{C}^n o en \mathbb{R}^n , entonces $N(0) = 0$.

La segunda observación se deriva de la propiedad 2 de la definición de norma vectorial 7.2.1 tomando como escalar al número 0. Debido a esto, es común ver que la propiedad 1 de la definición 7.2.1 se reescriba así:

$$N(x) \geq 0 \text{ y } N(x) = 0 \iff x = 0.$$

La notación más común para normas es $\|\cdot\|$.

7.2.3. Norma euclídeana o norma 2 o 2-norma

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (x^*x)^{\frac{1}{2}} \quad (7.1)$$

Para demostrar que (7.1) es una norma vectorial se utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Teorema 7.1. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Si $x, y \in \mathbb{C}^n$ entonces

$$|x^*y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Demostración. Se puede consultar por ejemplo en [vdG] Theorem 2.4. \square

Teorema 7.2. La 2-norma es una norma vectorial

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ y $\beta \in \mathbb{C}$.

1. Supongamos $x \neq 0$. Entonces alguna de sus componentes es no nula, digamos

$$x_j \neq 0. \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq (|x_j|^2)^{\frac{1}{2}} = |x_j| > 0.$$

$$2. \|\beta x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |\beta x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n |\beta|^2 |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\beta|^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\beta| \|x\|_2.$$

$$3. \|x + y\|_2^2 = (x + y)^*(x + y) = x^*x + y^*x + x^*y + y^*y \\ \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2.$$

\square

7.2.4. La norma 1 o 1-norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

7.2.5. La norma ∞ o norma uniforme

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

7.2.6. La norma p o p -norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Las normas 1 y 2 son casos particulares de la norma p . Demostrar que en efecto son normas es un ejercicio que vale la pena intentar. Para demostrar que la norma p satisface la desigualdad triangular se utiliza una desigualdad denominada de Hölder.

Teorema 7.3. (*Desigualdad de Hölder*) Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ para reales p, q mayores que 1. Entonces

$$|x^*y| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Demostración. Sugerimos ver el ejercicio 5.1.12 de [M]. □

7.3. Normas de matrices

La definición de una norma matricial se enuncia de forma análoga a la de una norma vectorial pero requiere de una condición adicional.

7.3.1. Definición

Sea $N : \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces N es una norma matricial si para todo $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$,

1. $A \neq 0 \implies N(A) > 0$. La norma es definida positiva.
2. $N(\beta A) = |\beta| N(A)$. La norma es homogénea.
3. $N(A + B) \leq N(A) + N(B)$. La norma satisface la desigualdad triangular.
4. $N(AB) \leq N(A)N(B)$. Propiedad submultiplicativa.

Así como antes, la notación usual para norma matricial es $\|\cdot\|$. Además, tal como lo discutimos después de la definición 7.2.1, la propiedad 1. se puede reescribir así:

$$\|A\| \geq 0 \text{ y } \|A\| = 0 \text{ si y solo si } A = 0.$$

Para matrices reales la definición es análoga. La primera norma que definimos es una generalización de la 2-norma vectorial.

7.3.2. Norma de Frobenius

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, su norma de Frobenius se define así:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\text{traza}(A^T A))^{\frac{1}{2}},$$

donde la traza de A fue definida en 1.1.4. Puede observarse que esta norma se puede pensar como la norma 2 del vector obtenido al hacer un vector fila (columna) consistente en todas las filas (columnas) de A , una enseguida de la otra.

7.3.3. Normas matriciales inducidas

Para normas vectoriales definidas en \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n se puede definir una norma matricial en $\mathbb{R}^{m \times n}$ de la siguiente manera:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|, \quad (7.2)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

La existencia de este máximo se debe a que toda norma vectorial es una función continua y el disco $\|x\| = 1$ de \mathbb{R}^n es un conjunto cerrado y acotado. Más detalles se pueden encontrar en la sección 5.1 de [M].

De la definición (7.2) se puede deducir que para cualquier norma inducida se cumple la siguiente condición de compatibilidad

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|. \quad (7.3)$$

Entre las normas inducidas se destacan las que corresponden a las normas vectoriales 1, ∞ y 2. Todas ellas tienen expresiones alternativas a (7.2) para su cálculo que se resumen así:

Teorema 7.4. Para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1.

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

2.

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

3.

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

Demostración. Para demostraciones de estas igualdades recomendamos la sección 5.2 de [M]. □

7.4. Nota MATLAB

```

a = rand(8); % matriz cuadrada escogida de forma aleatoria
u = abs(3); % valor absoluto de numero real
k = complex(3,-4); % numero complejo 3 - 4i
t = abs(k); % valor absoluto o modulo
b = a(:,1); % vector con la primera columna de a
r1 = norm(a,inf); % norma inf de a
r2 = norm(b,1); % norma 1 de b
r3 = norm(a); % norma 2 de a (es la norma por defecto en MATLAB)
r4 = norm(a,'fro'); % Norma de Frobenius

```

Parte II

Análisis matricial

Capítulo 8

Perturbaciones, errores y condicionamiento

Cuando se consulta en Google la frase *Garbage in garbage out* (abreviada GIGO) aparecen más de 10 millones de resultados. El primero de ellos es el siguiente:

garbage in, garbage out

phrase of garbage

1.

used to express the idea that in computing and other spheres, incorrect or poor quality input will always produce faulty output.

La frase *garbage in, garbage out* se puso de moda alrededor de 1960 y se refería a todo tipo de errores, incluyendo errores en el programa de computador. En este capítulo deseamos tratar ideas preliminares acerca de cálculos con datos inexactos (perturbados.) Suponemos que los cálculos se hacen de forma exacta o con programas de computador correctamente escritos y que los errores (perturbaciones) en los datos no se pueden evitar, ya sea porque vienen de algún proceso de aproximación previo o porque se agregaron artificialmente para imitar datos obtenidos en la vida diaria por medio de instrumentos de medición.

Distinguiremos dos categorías de matrices:

1. Matrices **bien condicionadas**: Algoritmos que se aplican a estas matrices con datos perturbados *siempre* producen soluciones que son *cercanas* a las soluciones exactas y las aproximan correctamente.
2. Matrices **mal condicionadas**: Cuando los diversos algoritmos se aplican a estas matrices con datos perturbados, *pueden* producir soluciones que son lejanas a las soluciones exactas y que son inservibles como aproximaciones.

Insistimos en que hay ocasiones en que las matrices mal condicionadas no causan problemas en los cálculos y que la frase *Garbage in garbage out* no se puede aplicar de forma general en este caso pero sí sirve como motivación y para que estemos prevenidos.

Un concepto del análisis numérico que se aplica mucho en álgebra lineal numérica es el de **estabilidad**. Se usa para calificar algoritmos así como el concepto de **condicionamiento** se aplica a matrices.

Trefethen y Bau en [TB] pag. 104 dicen:

A stable algorithm gives nearly the right answer to nearly the right question (Un algoritmo estable da una respuesta casi igual a la correcta cuando la pregunta es casi la misma que la original.)

Por su parte, Ipsen en [I] pag. 54 dice:

An algorithm is (very informally) numerically stable in exact arithmetic if each step in the algorithm is not worse conditioned than the original problem. (Un algoritmo es, hablando informalmente, estable numéricamente en aritmética exacta si cada paso del algoritmo no es más mal condicionado que el problema original.)

No intentaremos dar definiciones para estabilidad pero advertimos que hay varias. Nos quedaremos con las ideas expuestas en los dos libros citados arriba y confiamos que sean suficientes.

En la redacción de este capítulo utilizamos principalmente [I], [vdG], [TB] y [Da]. En este capítulo consideramos la propagación de errores en suma, multiplicación e inversión de matrices y en sistemas de ecuaciones. En los siguientes capítulos regresaremos a este tema varias veces.

8.1. Errores absoluto y relativo

Definición 8.1. *Supongamos que el número real x^* es una aproximación del número real x . Entonces:*

1. *El error absoluto en x^* es $|x - x^*|$.*
2. *Si $x \neq 0$, el error relativo en x^* es $\frac{|x - x^*|}{|x|}$.*

Ejemplo 8.2. *Supongamos $x = 10$. El error absoluto que resulta de aproximar x con el número $x^* = 10,2$ es 0,2 y el error relativo es 0,02.*

Supongamos ahora que $x = 0,1$. El error absoluto que resulta de aproximar x con el número $x^ = 0,2$ es 0,1 y el error relativo es 1.*

8.2. Sistema lineal

Las definiciones de error se extienden a vectores y matrices pero en lugar de valor absoluto se usan normas. Para observar propagación de errores en datos, el caso más sencillo de estudiar es el de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que corresponde a dos rectas en el plano. Si las rectas son casi paralelas se presenta mal condicionamiento como lo muestra el ejemplo de la siguiente nota.

Nota 8.3. MATLAB

Pequeñas perturbaciones pueden causar grandes efectos en las soluciones de los problemas modificados con respecto a la solución exacta. El siguiente código trabaja con un sistema lineal con una matriz 2×2 moderadamente mal condicionada.

```
a = [1 1/7;0.95 0.14];
ca = cond(a); % numero condicional de a
b = [1;0]; % lado derecho
x = a\b; % solucion exacta
a1 = [1 1/7;1 0.14]; % matriz perturbada
x1 = a1\b; % Solucion con a perturbada
ea1 = norm(x1-x); % error absoluto en x1
er1 = norm(x1-x)/norm(x); % error relativo en x1
b2 = [1;-0.2]; % lado derecho perturbado
x2 = a\b2; % solucion con lado derecho perturbado
ea2 = norm(x2-x); % error absoluto en x2
er2 = norm(x2-x)/norm(x); % error relativo en x2
los_b = [b,b2]; % los dos vectores b
los_x = [x x1 x2]; % las tres soluciones: x exacta, x1, x2
los_ea = [ea1 ea2]; % los dos errores absolutos
los_er = [er1 er2]; % los dos errores relativos
y1 = @(x) 7*(1-x); % recta 1
y2 = @(x) -(0.95/0.14)*x; % recta 2
xx = linspace(-100,100); % dominio
plot(xx,y1(xx),'r',xx,y2(xx),'k-') % grafica
grid on
hold on
plot(x(1),x(2),'kd','MarkerSize',12,'MarkerFaceColor',[0.5,0.5,0.5],...
'MarkerEdgeColor','r')
plot(x1(1),x1(2),'ks','MarkerSize',12,'MarkerFaceColor',[0.5,0.5,0.5],...
'MarkerEdgeColor','b')
```

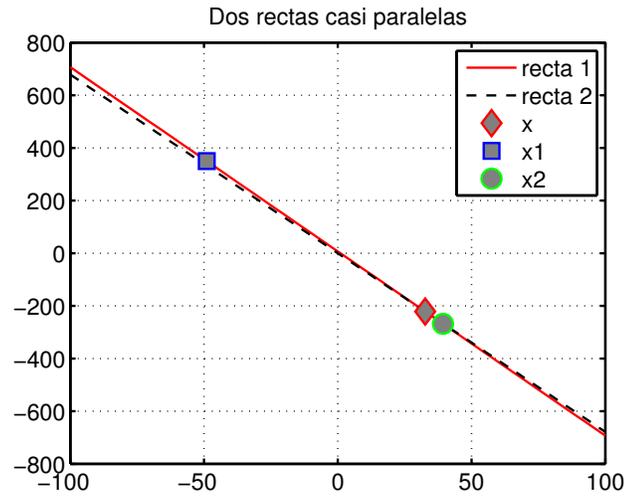


Figura 8.1: Mal condicionamiento

```

plot(x2(1),x2(2),'ko','MarkerSize',12,'MarkerFaceColor',[0.5,0.5,0.5],...
'MarkerEdgeColor','g')
legend('recta 1','recta 2','x','x1','x2')
title('Dos rectas casi paralelas')
%%%

```

$$\begin{aligned}
 \text{los_b} &= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -0,2 \end{pmatrix} \right] \\
 \text{los_x} &= \left[\begin{pmatrix} 32,6667 \\ -221,6667 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -49 \\ 350 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 39,3333 \\ -268,3333 \end{pmatrix} \right] \\
 \text{los_ea} &= [577,4705 \quad 47,1405] \\
 \text{los_er} &= [2,5773 \quad 0,2104]
 \end{aligned}$$

De estos resultados se puede concluir que perturbar esta matriz puede llevar a un sistema con solución que en nada aproxima a la solución del sistema original. Una perturbación del vector del lado derecho generó un sistema con solución menos lejana a la solución del sistema original.

En el código aparece el número de condición de una matriz. Lo definiremos a continuación.

Definición 8.4. Para una norma matricial $\|\cdot\|$ dada, el número de condición de una matriz invertible A se define como $\text{cond}(A) = \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Veremos que este número surge naturalmente en estudios de condicionamiento y que $1 \leq \kappa(A) < \infty$. Mientras mayor es $\kappa(A)$ más mal condicionada es la matriz.

8.3. Condicionamiento de normas matriciales

Las normas matriciales están bien condicionadas en el siguiente sentido.

Proposición 8.5. Si $A, E \in \mathbb{R}^{m \times n}$ entonces

$$\left| \|A + E\| - \|A\| \right| \leq \|E\|.$$

Demostración. Por desigualdad triangular,

$$\|A + E\| \leq \|A\| + \|E\| \quad \text{y} \quad \|A + E\| - \|A\| \leq \|E\|.$$

Ahora, $A = (A + E) - E$ y

$$\|A\| \leq \|A + E\| + \|E\|$$

luego

$$-\|E\| \leq \|A + E\| - \|A\|.$$

□

De la proposición anterior también podemos decir que prueba la continuidad de la norma como función de las componentes de la matriz.

8.4. Suma y producto de matrices

Teorema 8.6. (Propagación de perturbaciones en la suma de matrices) Sean $U, V, U_\varepsilon, V_\varepsilon \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tales que $U, V, U + V$ son no nulas y $U_\varepsilon, V_\varepsilon$ se toman como perturbaciones de U y V respectivamente. Entonces

$$\frac{\|(U_\varepsilon + V_\varepsilon) - (U + V)\|_p}{\|U + V\|_p} \leq \frac{\|U\|_p + \|V\|_p}{\|U + V\|_p} \max\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\} \quad (8.1)$$

donde

$$\varepsilon_U = \frac{\|U_\varepsilon - U\|_p}{\|U\|_p} \quad \text{y} \quad \varepsilon_V = \frac{\|V_\varepsilon - V\|_p}{\|V\|_p}. \quad (8.2)$$

Demostración. $\|(U_\varepsilon + V_\varepsilon) - (U + V)\|_p \leq \|U_\varepsilon - U\|_p + \|V_\varepsilon - V\|_p$
 $= \|U\|_p \varepsilon_U + \|V\|_p \varepsilon_V \leq (\|U\|_p + \|V\|_p) \max\{\varepsilon_U, \varepsilon_V\}$. \square

Teorema 8.7. (*Propagación de perturbaciones en la multiplicación de matrices*) Sean $U, U_\varepsilon \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $V, V_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n \times q}$ tales que U, V, UV son no nulas y como antes, $U_\varepsilon, V_\varepsilon$ se toman como perturbaciones de U y V respectivamente. Entonces

$$\frac{\|U_\varepsilon V_\varepsilon - UV\|_p}{\|UV\|_p} \leq \frac{\|U\|_p \|V\|_p}{\|UV\|_p} (\varepsilon_U + \varepsilon_V + \varepsilon_U \varepsilon_V) \quad (8.3)$$

donde ε_U y ε_V están dados por (8.2).

Demostración. Sean $U_\varepsilon = U + E$ y $V_\varepsilon = V + F$. Entonces $U_\varepsilon V_\varepsilon - UV = (U + E)(V + F) - UV = UF + EV + EF$. Tomando normas, contando con desigualdad triangular y propiedad submultiplicativa, llegamos a $\|U_\varepsilon V_\varepsilon - UV\|_p \leq \|U\|_p \|F\|_p + \|E\|_p \|V\|_p + \|E\|_p \|F\|_p = \|U\|_p \|V\|_p \left(\frac{\|F\|_p}{\|V\|_p} + \frac{\|E\|_p}{\|U\|_p} + \frac{\|E\|_p \|F\|_p}{\|U\|_p \|V\|_p} \right)$. \square

Nota 8.8. *Observamos:*

1. En lo sucesivo, si no hay confusión, se suprime el subíndice p de la norma.
2. Los números $\frac{\|U\|_p + \|V\|_p}{\|U+V\|_p}$ y $\frac{\|U\|_p \|V\|_p}{\|UV\|_p}$ se denominan números de condición para la suma y la multiplicación respectivamente.
3. Los resultados (8.1) y (8.3) indican que el error que se genera al utilizar aproximaciones de las matrices, es del mismo orden de magnitud que las perturbaciones en las matrices. Por extensión a lo establecido anteriormente, se dice que las operaciones suma y producto son **bien condicionadas** o son **estables** con respecto a perturbaciones en los datos.

8.5. Invertir una matriz

Ahora interesa saber cómo se propagan los errores cuando se invierte una matriz.

Teorema 8.9. (*Inversa de identidad perturbada*) Si $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\|E\| < 1$ entonces $I + E$ es no singular y

$$\frac{1}{1 + \|E\|} \leq (I + E)^{-1} \leq \frac{1}{1 - \|E\|}.$$

Si además $\|E\| \leq \frac{1}{2}$ entonces $\|(I + E)^{-1}\| \leq 2$.

Demostración. □

Supongamos $\|E\| < 1$ y trabajemos por absurdo. Si $I + E$ es singular, hay un vector $x \neq 0$ tal que $(I + E)x = 0$. De aquí se deduce $\|x\| \leq \|Ex\| \leq \|E\| \|x\| < \|x\|$. Esto es una contradicción. Para el primer estimado hacemos lo siguiente:

$$I = (I + E)(I + E)^{-1} \quad (8.4)$$

y

$$1 = \|I\| = \|(I + E)(I + E)^{-1}\| \leq (1 + \|E\|) \|(I + E)^{-1}\|.$$

Para la segunda desigualdad, de (8.4) obtenemos

$$I = (I + E)^{-1} + E(I + E)^{-1}$$

y por tanto

$$1 = \|I\| \geq \left| \|(I + E)^{-1}\| - \|E(I + E)^{-1}\| \right|. \quad (8.5)$$

Por otro lado, $\|E(I + E)^{-1}\| \leq \|E\| \|(I + E)^{-1}\|$ de donde

$$\begin{aligned} \|(I + E)^{-1}\| - \|E(I + E)^{-1}\| &\geq \|(I + E)^{-1}\| - \|E\| \|(I + E)^{-1}\| \\ &= \|(I + E)^{-1}\| (1 - \|E\|) > 0. \end{aligned}$$

Volvemos a (8.5),

$$\begin{aligned} 1 = \|I\| &\geq \left| \|(I + E)^{-1}\| - \|E(I + E)^{-1}\| \right| \\ &= \left| \|(I + E)^{-1}\| - \|E\| \|(I + E)^{-1}\| \right| \\ &= \|(I + E)^{-1}\| (1 - \|E\|). \end{aligned}$$

Finalmente, si $\|E\| \leq \frac{1}{2}$ entonces $1 - \|E\| \geq \frac{1}{2}$ y por tanto $\frac{1}{1 - \|E\|} \leq 2$.

Para matrices generales se tiene:

Teorema 8.10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular y sea $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\|A^{-1}E\| < 1$. Entonces, $A + E$ es invertible y

$$\|(A + E)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}E\|}.$$

Si además, $\|A^{-1}\| \|E\| \leq \frac{1}{2}$ entonces $\|(A + E)^{-1}\| \leq 2 \|A^{-1}\|$.

Demostración. Escribimos $A + E = A(I + A^{-1}E)$. Como $\|A^{-1}E\| < 1$, el teorema 8.9 dice que $I + A^{-1}E$ es invertible y por tanto $A + E$ también es invertible. Su inversa es

$$(A + E)^{-1} = (A(I + A^{-1}E))^{-1} = (I + A^{-1}E)^{-1} A^{-1}.$$

La submultiplicatividad y el teorema 8.9 permiten concluir el resultado deseado. Para la afirmación final, basta tener en cuenta que $\|A^{-1}E\| \leq \|A^{-1}\| \|E\| \leq \frac{1}{2}$. \square

Ya estamos listos para probar un teorema sobre el error que se comete cuando en lugar de invertir una matriz A , se invierte una aproximación de A dada por $A + E$.

Teorema 8.11. (*Inversa de una matriz perturbada*) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular y sea $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\|A^{-1}E\| < 1$. Entonces,

$$\|(A + E)^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \frac{\|A^{-1}E\|}{1 - \|A^{-1}E\|}.$$

Además, si $\|A^{-1}\| \|E\| \leq \frac{1}{2}$, entonces

$$\frac{\|(A + E)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq 2\kappa(A) \frac{\|E\|}{\|A\|}$$

donde $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Demostración. Llamemos $F = A^{-1}E$.

$$\begin{aligned} (A + E)^{-1} - A^{-1} &= (I + F)^{-1} A^{-1} - A^{-1} \\ &= ((I + F)^{-1} - I) A^{-1} \\ &= -(I + F)^{-1} F A^{-1} \end{aligned}$$

usando la igualdad $I = (I + F)^{-1} (I + F)$. Por teorema 8.9,

$$\begin{aligned} \|(A + E)^{-1} - A^{-1}\| &\leq \|(I + F)^{-1}\| \|F\| \|A^{-1}\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \frac{\|F\|}{1 - \|F\|}. \end{aligned}$$

Para la segunda parte, si $\|A^{-1}\| \|E\| \leq \frac{1}{2}$,

$$\|(A + E)^{-1} - A^{-1}\| \leq 2\|F\| \|A^{-1}\|$$

pues $\|(I + F)^{-1}\| \leq 2$. Pero $\|F\| \leq \|A^{-1}\| \|E\| = \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|E\|}{\|A\|}$ y así

$$\frac{\|(A + E)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq 2 \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|E\|}{\|A\|}. \quad (8.6)$$

□

Nota 8.12. Notemos que el número $\frac{\|E\|}{\|A\|}$ es el error relativo en $A + E$. Por tanto el estimado (8.6) dice que una cota para el error relativo en $(A + E)^{-1}$ es un múltiplo del error relativo en $A + E$. ¿Qué múltiplo? $2\kappa(A)$. Por consiguiente, mientras mayor sea $\kappa(A)$ mayor puede ser el error relativo en $(A + E)^{-1}$. Con razón al número $\kappa(A)$ se le llama número de condición para la matriz A .

Capítulo 9

Condicionamiento y sistemas lineales

En este capítulo nos interesa estimar el efecto que tienen perturbaciones en la matriz y/o el lado derecho de un sistema lineal sobre la solución del sistema. La estimación depende del número de condición de la matriz y sirve solamente para advertir de una posible discrepancia significativa en la solución del nuevo problema.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular y $b \in \mathbb{R}^n$. Por teorema 4.8 el sistema

$$Ax = b \tag{9.1}$$

tiene una única solución. Ahora, nos interesa considerar el sistema perturbado

$$(A + E)z = b + r \tag{9.2}$$

y estimar el error en la nueva solución z . En primer lugar estudiamos el caso en el que A no ha sido perturbada y después consideramos el caso general. Para la escritura tuvimos en cuenta principalmente los libros [I] y [A].

9.1. Lado derecho perturbado

Consideremos el sistema

$$Ay = b + r \tag{9.3}$$

que interpretamos así: $b + r$ es una aproximación de b . Si hacemos $e = y - x$ y restamos (9.3)-(9.1), obtenemos la ecuación para el error que es

$$Ae = r. \tag{9.4}$$

Se dice que el error e satisface la misma ecuación lineal pero con el **residual** r como lado derecho. Nótese que $\frac{\|e\|}{\|x\|}$ y $\frac{\|r\|}{\|b\|}$ son los errores relativos en y y $b + r$ respectivamente.

De (9.4), $\|r\| = \|Ae\| \leq \|A\| \|e\|$ y como $e = A^{-1}r$, entonces también $\|e\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|$. La primera desigualdad la dividimos por $\|A\| \|x\|$, la segunda desigualdad la dividimos por $\|x\|$ y obtenemos

$$\frac{\|r\|}{\|A\| \|x\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|r\|}{\|x\|}.$$

Enseguida usamos las desigualdades

$$\|b\| \leq \|A\| \|x\| \text{ y } \|x\| \leq \|A^{-1}\| \|b\|$$

y llegamos a

$$\frac{1}{\|A\| \|A^{-1}\| \|b\|} \frac{\|r\|}{\|x\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|}. \quad (9.5)$$

Con la notación establecida $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$, vemos claramente que a mayor tamaño del número de condición $\kappa(A)$ mayor es el rango en el que puede estar el error relativo en y . Además, la desigualdad (9.5) también dice que el error relativo en y está acotado por dos múltiplos constantes del error relativo en $b + r$.

9.2. Caso general

El caso general (9.2) se desarrolla de forma similar. La suposición que hacemos es $\|A^{-1}\| \|E\| < 1$ que implica $\|A^{-1}E\| < 1$, lo que garantiza que $A + E$ es invertible. El resultado que se da en este caso es

$$\frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|E\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|r\|}{\|b\|} + \frac{\|E\|}{\|A\|} \right). \quad (9.6)$$

De teorema 8.10 sabemos

$$\|(A + E)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}E\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|E\|}.$$

Ahora, de (9.2) si hacemos $e = z - x$, tenemos $Ax + Ex + (A + E)e = b + r$. Como $Ax = b$, entonces

$$e = (A + E)^{-1} (r - Ex).$$

Luego

$$\begin{aligned} \|e\| &= \|(A + E)^{-1} (r - Ex)\| \\ &\leq \|(A + E)^{-1}\| \|r - Ex\| \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|E\|} (\|r\| + \|E\| \|x\|) \\ &= \frac{\|A\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|E\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|r\|}{\|A\|} + \frac{\|E\|}{\|A\|} \|x\| \right). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\|e\|}{\|x\|} &\leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|E\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|r\|}{\|A\| \|x\|} + \frac{\|E\|}{\|A\|} \right) \\ &\leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|E\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|r\|}{\|b\|} + \frac{\|E\|}{\|A\|} \right). \end{aligned}$$

De esta forma queda estimado el error relativo en z por medio de los errores relativos en $b + r$ y en $A + E$. El coeficiente depende de $\kappa(A)$ y de la relación $\|A^{-1}\| \|E\| < 1$ que corresponde a $1 - \kappa(A) \frac{\|E\|}{\|A\|} > 0$. Si $\frac{\|E\|}{\|A\|} = 0,001$ y $\kappa(A) = 900$ entonces

$\frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|E\|}{\|A\|}} = 9000$. De manera que existe la posibilidad de tener un rango amplio para el error relativo en z .

9.3. Estabilidad de métodos directos

La mayoría de los métodos directos para resolver sistemas lineales se basan en factorizaciones como veremos en los capítulos finales de estas notas: LU , LL^T , QR son algunas de estas factorizaciones. El siguiente teorema analiza la propagación del error cuando la matriz del sistema está factorizada. Se parte de la siguiente base:

Para el sistema $Ax = b$ si $A = S_1 S_2$, con S_1 y S_2 invertibles, entonces el sistema se resuelve por medio de dos sistemas lineales

$$\begin{aligned} S_1 y &= b \\ S_2 x &= y. \end{aligned}$$

El ejemplo que ya conocemos en estas notas es: $A = LU$. El sistema se resuelve así:

$$\begin{aligned} Ly &= b \\ Ux &= y. \end{aligned}$$

Teorema 9.1. Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular, $b \in \mathbb{R}^n$ no nulo y suponga que $Ax = b$. Supongamos

$$\begin{aligned} A + E &= S_1 S_2, \quad \varepsilon_A = \frac{\|E\|}{\|A\|} \\ S_1 y &= b + r_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\|r_1\|}{\|b\|} \\ S_2 z &= y + r_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\|r_2\|}{\|y\|}. \end{aligned}$$

Si $\|A^{-1}\| \|E\| \leq \frac{1}{2}$ entonces

$$\frac{\|z - x\|}{\|x\|} \leq 2\kappa(A) (\varepsilon_A + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

donde

$$\varepsilon = \frac{\|S_2^{-1}\| \|S_1^{-1}\|}{\|(A + E)^{-1}\|} \varepsilon_2 (1 + \varepsilon_1).$$

Demostración. Ver Fact 3.14 de [I].

□

Capítulo 10

Sistemas lineales especiales

La estructura de la matriz A en un sistema $Ax = b$ sugiere frecuentemente la manera de resolver el sistema de una forma eficiente. El ejemplo más simple es cuando la matriz A es triangular, ya sea superior o inferior. En esos casos la eliminación de Gauss se reduce a una sustitución regresiva (back substitution) o progresiva (forward substitution) respectivamente. Cuando la matriz del sistema A se obtiene de la discretización de ecuaciones diferenciales por diferencias finitas o por elementos finitos, es muy común que A sea de una de estas clases: diagonalmente dominante, tridiagonal, tridiagonal por bloques o simétrica definida positiva. Para cada una de ellas hay estrategias recomendadas para la solución del sistema $Ax = b$. Además, si las ecuaciones diferenciales son no lineales, es de esperarse que se deba recurrir a un método iterativo, por ejemplo, el método de Newton y que haya que resolver varios sistemas lineales con matrices de algunas de las formas mencionadas arriba.

En este capítulo presentamos algunas matrices que vienen de discretización de ecuaciones diferenciales. Para escribirlo utilizamos como referencias los libros [Da], [M], [KC] y [O] además de las notas de clase [Me]. No es casualidad que dos de estos libros y las notas sean de análisis numérico, es que estamos en un punto de gran interacción entre varias disciplinas.

10.1. Problemas con valores en la frontera

La primera fuente de matrices especiales que estudiamos corresponde a ecuaciones diferenciales ordinarias. Nos interesa la solución numérica del siguiente problema:

$$\begin{aligned}y'' &= f(t, y, y') \\ y(a) &= \alpha, \quad y(b) = \beta\end{aligned}\tag{10.1}$$

Con unas condiciones de borde un poco más generales y bajo ciertas hipótesis sobre f y sus derivadas parciales f_t , f_y y $f_{y'}$, Herbert B. Keller probó un teorema de existencia y unicidad para el problema (10.1) que puede consultarse en la sección 8.9 de [KC].

Hay un caso particular que es de interés, es el caso lineal dado por

$$\begin{aligned} y'' &= u(t) + v(t)y + w(t)y' \\ y(a) &= \alpha, \quad y(b) = \beta \end{aligned} \quad (10.2)$$

Para discretizar las ecuaciones en los problemas (10.1) y (10.2), utilizamos diferencias finitas, es decir, sustitución de derivadas por diferencias a partir del Teorema de Taylor, que es probablemente el teorema del cálculo de mayor importancia en análisis numérico.

El intervalo $[a, b]$ lo dividimos en $n + 1$ subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$, de longitud uniforme $h > 0$. Aquí $t_i = a + ih$, $0 \leq i \leq n + 1$. La relación entre h y n es

$$h = \frac{b - a}{n + 1}.$$

La variable continua y la sustituimos por la variable discreta Y , por tanto, Y_i es la aproximación de $y(t_i)$. En los puntos interiores del dominio discreto, o sea de t_1 a t_n , las derivadas las sustituimos por las siguientes diferencias:

$$\begin{aligned} y'' &\text{ se cambia por } \frac{Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}}{h^2} \\ y' &\text{ se cambia por } \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} \end{aligned}$$

Además, las condiciones de borde las imponemos así: $Y_0 = \alpha$, $Y_{n+1} = \beta$. Las versiones discretas de (10.1) y (10.2) son:

$$\begin{aligned} Y_0 &= \alpha \\ \frac{Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}}{h^2} &= f\left(t_i, Y_i, \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h}\right) \text{ para } i = 1, \dots, n \\ Y_{n+1} &= \beta \end{aligned} \quad (10.3)$$

y

$$\begin{aligned} Y_0 &= \alpha \\ \frac{Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}}{h^2} &= u_i + v_i Y_i + w_i \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} \text{ para } i = 1, \dots, n \\ Y_{n+1} &= \beta, \end{aligned} \quad (10.4)$$

donde $u_i = u(t_i)$, $v_i = v(t_i)$ y $w_i = w(t_i)$.

Antes de continuar introducimos un concepto de álgebra lineal.

Definición 10.1. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice que es estrictamente diagonalmente dominante (EDD) si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.5)$$

Proposición 10.2. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz EDD entonces A es invertible.

Demostración. Supongamos que A es EDD y que existe un vector $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$. Sea

$$|x_k| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Entonces $|x_k| > 0$ y como $Ax = 0$ entonces $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Luego para k se tiene

$$|a_{kk}| |x_k| = \left| \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j \right| \leq |x_k| \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$$

y esto contradice (10.5). □

10.1.1. Caso lineal

Continuamos con los problemas discretos (10.3) y (10.4) pero empezamos con el más sencillo que es (10.4). Lo reordenamos

$$\begin{aligned} Y_0 &= \alpha & (10.6) \\ \left(-1 - \frac{h}{2}w_i\right) Y_{i-1} + (2 + h^2v_i) Y_i + \left(-1 + \frac{h}{2}w_i\right) Y_{i+1} &= -h^2u_i, \quad i = 1, \dots, n \\ Y_{n+1} &= \beta, \end{aligned}$$

y usamos las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} a_i &= -1 - \frac{h}{2}w_i \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n-1 \\ d_i &= 2 + h^2v_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n \\ c_i &= -1 + \frac{h}{2}w_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n \\ b_i &= -h^2u_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

$x = b$ y para todo t . La condición inicial se define para $x \in (a, b)$ y $t = 0$. La ecuación (10.9) tiene validez en $(a, b) \times (0, \infty)$. Esta ecuación da cuenta de procesos difusivos lineales, por ejemplo, la conducción de calor. Debido a esto, muy frecuentemente nos referimos a la variable dependiente como temperatura, aunque este modelo se puede utilizar en muchos otros procesos.

Consideremos discretizaciones uniformes en espacio y tiempo dadas por

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots \text{ y } t_j = jk, \quad j = 0, 1, \dots$$

donde h y k son los tamaños de paso en las direcciones de espacio y tiempo respectivamente. Ambos son reales positivos. Es conveniente definir también

$$r = \frac{k}{h^2}.$$

10.2.1. Diferencias finitas

En todas las aproximaciones de diferencias finitas utilizamos la variable discreta V_i^j para representar la aproximación de u en el punto de la malla (x_i, t_j) que se calcula por medio del método numérico. Sea $h = \frac{b-a}{n+1}$ y supongamos que tenemos condiciones de borde de tipo Dirichlet para $x = a = x_0$ y $x = b = x_{n+1}$, es decir, los elementos V_0^j y V_{n+1}^j son conocidos para todo j . Además, definimos la variable discreta vectorial $V^j = [V_1^j, V_2^j, \dots, V_n^j]^T$ para representar el vector de aproximaciones en el nivel temporal j . Nótese que una condición inicial significa que el vector V^0 es conocido.

10.2.2. Métodos más comunes

Distinguiamos varias expresiones de diferencias finitas que aproximan (10.9). Veamos algunas:

Método explícito La temperatura V_i^{j+1} se escribe en términos de temperaturas en niveles anteriores en la escala temporal.

$$\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{k} = \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{h^2}$$

que conduce a

$$V_i^{j+1} = V_i^j + r(V_{i-1}^j - 2V_i^j + V_{i+1}^j). \quad (10.10)$$

Sea $A = \text{trid}(r, 1 - 2r, r)$ la matriz tridiagonal de orden n con elementos diagonales $1 - 2r$ y elementos super y sub diagonales iguales a r .

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2r & r & & & \\ r & 1 - 2r & r & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & r & 1 - 2r & r \\ & & & & r & 1 - 2r \end{pmatrix}$$

La igualdad (10.10) se puede escribir

$$V^{j+1} = AV^j \quad (10.11)$$

lo que indica que

$$V^j = A^j V^0. \quad (10.12)$$

Los iterados consecutivos se consiguen por aplicación de potencias de A a la condición inicial.

Los métodos explícitos, para que sean *útiles*, requieren de una condición sobre los parámetros de discretización. En este caso la condición es

$$r \leq \frac{1}{2}. \quad (10.13)$$

La utilidad no es un término matemático, en realidad lo que se busca es que el método numérico sea *estable* y a métodos con restricciones se les llama *condicionalmente estables*. Detalles sobre este tema pueden verse en [KC] y [Me].

Método implícito La temperatura V_i^{j+1} se escribe en términos de temperaturas en el mismo nivel y en niveles anteriores de la escala temporal,

$$\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{k} = \frac{V_{i+1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i-1}^{j+1}}{h^2},$$

que se puede escribir

$$(1 + 2r)V_i^{j+1} - rV_{i-1}^{j+1} - rV_{i+1}^{j+1} = V_i^j. \quad (10.14)$$

Sea $A = \text{trid}(-r, 1 + 2r, -r)$ la matriz tridiagonal de orden n con elementos diagonales $1 + 2r$ y elementos super y sub diagonales iguales a $-r$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2r & -r & & & \\ -r & 1 + 2r & -r & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -r & 1 + 2r & -r \\ & & & & -r & 1 + 2r \end{pmatrix}$$

La igualdad (10.14) se puede escribir

$$AV^{j+1} = V^j. \quad (10.15)$$

Es decir, en cada paso temporal, se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales con matriz simétrica, tridiagonal y diagonalmente dominante (por tanto no singular).

Agregamos finalmente que para este método implícito no hay una restricción sobre los parámetros de discretización del estilo de (10.13). Este método es *incondicionalmente estable*.

Métodos mixtos dependientes de un parámetro $\alpha \in [0, 1]$ La forma general es

$$\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{k} = \alpha \frac{V_{i+1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i-1}^{j+1}}{h^2} + (1 - \alpha) \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{h^2}.$$

Los dos métodos anteriores son casos particulares de éste, basta hacer $\alpha = 0$ y 1 respectivamente. El más importante de los métodos mixtos es el que corresponde a $\alpha = \frac{1}{2}$ que se llama de Crank-Nicolson. Está dado por la igualdad

$$\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{k} = \frac{1}{2h^2} (V_{i+1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i-1}^{j+1} + V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j)$$

que también podemos escribir

$$-rV_{i-1}^{j+1} + 2(1+r)V_i^{j+1} - rV_{i+1}^{j+1} = rV_{i-1}^j + 2(1-r)V_i^j + rV_{i+1}^j. \quad (10.16)$$

Sean $A = \text{trid}(-r, 2(1+r), -r)$ y $B = \text{trid}(r, 2(1-r), r)$ matrices de orden n . La ecuación (10.16) se escribe como el sistema

$$AV^{j+1} = BV^j,$$

con V^{j+1} como incógnita. Este es el sistema que debe resolverse para cada iteración temporal.

Anotamos finalmente que este método también es incondicionalmente estable.

10.3. Ecuación de Laplace

En dos variables, la ecuación de Laplace es

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (10.17)$$

para u una función de (x, y) . Se define en regiones de \mathbb{R}^2 y no depende de la variable temporal. Con base en la ecuación de Laplace, nos interesa presentar la solución numérica de un sencillo problema conocido como *problema de Dirichlet*, que aparece frecuentemente en ciencias e ingeniería.

Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 con frontera $\partial\Omega$. Queremos resolver numéricamente un caso particular del siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ en } \Omega \\ u(x, y) &= g(x, y) \text{ en } \partial\Omega \\ u &\text{ es continua en } \overline{\Omega}.\end{aligned}\tag{10.18}$$

El caso particular de interés es utilizar el cuadrado unitario como dominio.

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

Para trabajar por diferencias finitas debemos hacer una malla de puntos en todo el cuadrado. Presentamos únicamente el caso en el que la malla es uniforme y el parámetro de discretización es el mismo en las dos direcciones, x y y .

$$(x_i, y_j) = (ih, jh), \quad i, j = 0, \dots, n+1, \quad h = \frac{1}{n+1}.$$

Para el problema discreto utilizamos la variable V_i^j para aproximar a $u(x_i, y_j)$. Nótese que

$$V_0^j = g(0, y_j), V_{n+1}^j = g(1, y_j), V_i^0 = g(x_i, 0) \text{ y } V_i^{n+1} = g(x_i, 1)\tag{10.19}$$

son conocidos, vienen de valores en la frontera.

Siguiendo con la técnica de diferencias finitas, el problema discreto que sirve para resolver (10.18) es

$$\frac{V_{i-1}^j - 2V_i^j + V_{i+1}^j}{h^2} + \frac{V_i^{j-1} - 2V_i^j + V_i^{j+1}}{h^2} = 0$$

para los puntos interiores de la malla que corresponden a $i, j = 1, \dots, n$. Reordenando, se llega a

$$4V_i^j - V_{i-1}^j - V_{i+1}^j - V_i^{j-1} - V_i^{j+1} = 0.\tag{10.20}$$

Consideremos el caso particular $n = 4$ ilustrado en la figura adjunta.

Deseamos escribir (10.20) en la forma $Av = b$ con A una matriz 16×16 , v el vector que corresponde a los V_i^j de los nodos interiores de la malla y b el vector de lado derecho que aparece debido a los valores conocidos en la frontera.

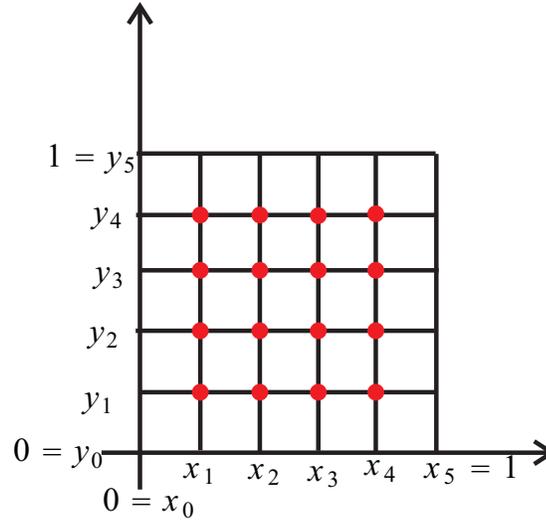


Figura 10.1: Malla de 16 nodos interiores

Hagamos

$$\begin{aligned}
 v_1 &= V_1^1, v_2 = V_2^1, v_3 = V_3^1, v_4 = V_4^1, \\
 v_5 &= V_1^2, v_6 = V_2^2, v_7 = V_3^2, v_8 = V_4^2, \\
 v_9 &= V_1^3, v_{10} = V_2^3, v_{11} = V_3^3, v_{12} = V_4^3, \\
 v_{13} &= V_1^4, v_{14} = V_2^4, v_{15} = V_3^4, v_{16} = V_4^4.
 \end{aligned}$$

Con esta notación y basados en (10.20) y (10.19), el sistema lineal que se debe

resolver es:

$$\begin{aligned}
 4v_1 - v_2 - v_5 &= V_0^1 + V_1^0 & (10.21) \\
 4v_2 - v_1 - v_3 - v_6 &= V_2^0 \\
 4v_3 - v_2 - v_4 - v_7 &= V_3^0 \\
 4v_4 - v_3 - v_8 &= V_4^0 + V_5^1 \\
 4v_5 - v_1 - v_6 - v_9 &= V_0^2 \\
 4v_6 - v_2 - v_7 - v_{10} - v_5 &= 0 \\
 4v_7 - v_3 - v_8 - v_{11} - v_6 &= 0 \\
 4v_8 - v_4 - v_7 - v_{12} &= V_5^2 \\
 4v_9 - v_5 - v_{10} - v_{13} &= V_0^3 \\
 4v_{10} - v_6 - v_{11} - v_{14} - v_9 &= 0 \\
 4v_{11} - v_7 - v_{12} - v_{15} - v_{10} &= 0 \\
 4v_{12} - v_8 - v_{16} - v_{11} &= V_5^3 \\
 4v_{13} - v_9 - v_{14} &= V_1^5 + V_0^4 \\
 4v_{14} - v_{10} - v_{15} - v_{13} &= V_2^5 \\
 4v_{15} - v_{11} - v_{16} - v_{14} &= V_3^5 \\
 4v_{16} - v_{12} - v_{15} &= V_5^4 + V_4^5
 \end{aligned}$$

La matriz de este sistema es tridiagonal por bloques dada por

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & & \\ -I & T & -I & \\ & -I & T & -I \\ & & -I & T \end{pmatrix} \quad (10.22)$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ & -1 & 4 & -1 \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad -I = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

El vector del lado derecho es

$$b = \begin{pmatrix} V_0^1 + V_1^0 \\ V_2^0 \\ V_3^0 \\ V_4^0 + V_5^1 \\ V_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ V_5^2 \\ V_0^3 \\ 0 \\ 0 \\ V_5^3 \\ V_1^5 + V_0^4 \\ V_2^5 \\ V_3^5 \\ V_5^4 + V_4^5 \end{pmatrix}$$

10.4. Nota MATLAB

1. Para resolver problemas con valores en la frontera MATLAB ofrece las rutinas `bvp4c` y `bvp5c`.
2. Al escribir `doc gallery` en la línea de comandos, aparece el sistema de ayuda para una galería de matrices que se sugieren como ejemplo o como modelo. La matriz (10.22) se conoce como `poisson` en esta galería. Las matrices tridiagonales aparecen en la galería como `tridiag`.

Capítulo 11

Primeros algoritmos de factorización de matrices

La semejanza de matrices es una herramienta teórica de gran importancia, basta pensar en el estudio de matrices diagonalizables, en la forma de Jordan y en el teorema de triangularización de Schur, temas que se pueden consultar en muchos libros, por ejemplo en [M] y [O]. La semejanza es un caso particular de factorización pero hay otros casos de factorización de matrices y varios de ellos son de interés en álgebra lineal numérica. Ya conocemos el algoritmo de la factorización LU . En este capítulo la volvemos a considerar y también introducimos el algoritmo de Cholesky. Además, explicamos la forma de resolver sistemas lineales por medio de una factorización de la matriz del sistema. Las principales fuentes que consultamos son [A], [I], [Da], [JR], [O] y [M]. Para que la exposición sea lo más completa posible mencionamos brevemente los conceptos de diagonalización y triangularización de matrices.

11.1. Matriz diagonalizable

Definición 11.1. *Dos matrices A y B de tamaño $n \times n$ se dice que son **semejantes** si existe una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = B$.*

Teorema 11.2. *Si A y B de tamaño $n \times n$ son semejantes, entonces sus espectros son iguales o sea $\sigma(A) = \sigma(B)$ o en otras palabras, tienen los mismos valores propios.*

Demostración. Basta demostrar que tienen el mismo polinomio característico. Su-

pongamos $B = P^{-1}AP$. Entonces

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det(P^{-1}P) \det(A - \lambda I) \\ &= \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(B - \lambda I).\end{aligned}$$

□

Definición 11.3. Una matriz cuadrada A se dice que es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal. Por teorema 11.2, los valores propios de A aparecen en la diagonal de la matriz diagonal semejante.

Definición 11.4. Un conjunto completo de vectores propios para una matriz cuadrada A es cualquier conjunto de n vectores propios que es LI.

No todas las matrices tienen un conjunto completo de vectores propios. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es tal que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de manera que $\left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ es un par propio de A . Llamemos $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. No hay un vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tal que $\{z, x\}$ es LI y ambos son vectores propios de A . El único valor propio de A es 1, de manera que $Ax = x$ significa $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, por tanto $x_2 = 0$ y resulta que x es un múltiplo escalar de z por lo cual no puede ser que $\{z, x\}$ sea LI. A las matrices que no tienen un conjunto completo de vectores propios se les llama **defectivas** o **deficientes**.

Definición 11.5. Se dice que una matriz $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es unitaria si sus columnas constituyen una base ortonormal de \mathbb{C}^n .

Definición 11.6. Se dice que una matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonal si sus columnas constituyen una base ortonormal de \mathbb{R}^n .

Proposición 11.7. 1. $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es unitaria si y solo si $U^*U = UU^* = I$ si y solo si $U^{-1} = U^*$.

2. $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonal si y solo si $U^T U = UU^T = I$ si y solo si $U^{-1} = U$.

Teorema 11.8. Una matriz cuadrada A tiene un conjunto completo de vectores propios si y solo si es **diagonalizable**. Es decir, A tiene un conjunto completo de vectores propios si y solo si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D$ donde D es una matriz diagonal.

Demostración. La idea principal es que si (λ_i, V_i) , $i = 1, \dots, n$ es un conjunto de pares propios de A y el conjunto $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ es LI, entonces la matriz $P = (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n)$ es no singular y $P^{-1}AP = D$ con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

Teorema 11.9. (*Schur*) *Toda matriz cuadrada real o compleja es unitariamente semejante a una matriz triangular superior. Es decir, si A es $n \times n$ existen una matriz unitaria U y una matriz triangular superior T tales que $U^*AU = T$. Además, los elementos diagonales de T son los valores propios de A .*

Demostración. Ver [M] chapter 7 o theorem 3.6 de [JR].

□

Teorema 11.10. (*Ejes principales*) *Toda matriz cuadrada hermitiana (simétrica) A es unitariamente (ortogonalmente) semejante a una matriz diagonal. Los elementos en la diagonal de la matriz diagonal son los valores propios de A .*

Demostración. Consultar theorem 7.4 de [A].

□

Nota 11.11. 1. *Si $U^T AU = D$ es la semejanza ortogonal para la matriz simétrica A , entonces las columnas de U conforman una base ortonormal de vectores propios de A .*

2. *Toda matriz cuadrada es triangularizable, es decir, es semejante a una matriz triangular superior. Sin embargo, no toda matriz cuadrada es diagonalizable.*
3. *Hay un teorema de Schur para matrices reales que usa matrices ortogonales para la semejanza. Sin embargo, la matriz T no tiene que ser triangular superior en este caso, pues en la diagonal pueden aparecer bloques 2×2 correspondientes a los valores propios complejos de la matriz A . Para los detalles ver theorem 9.45 de [Da].*
4. *Sea A una matriz cuadrada. No puede haber un algoritmo basado en funciones básicas de los elementos de la matriz, para lograr que en un número finito de pasos se encuentre una matriz P tal que $P^{-1}AP = T$ con T triangular superior. Funciones básicas son: suma y resta, multiplicación y*

división, además de raíces k –ésimas. Si tal procedimiento existiera estaríamos encontrando de forma sencilla los valores propios de la matriz A , lo que significa que tendríamos un procedimiento basado en funciones elementales sobre los coeficientes de A para factorizar polinomios con coeficientes reales de cualquier grado (polinomios característicos.) Esto no se puede hacer, pues el famoso **teorema de Abel** dice: Si $n \geq 5$ y $p(t)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales, entonces en general no hay manera de expresar las raíces de $p(t)$ en términos de funciones básicas de los coeficientes de $p(t)$.

5. Sea $p(t)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales. Existe una matriz llamada Matriz Compañera C_p de $p(t)$ y es tal que el polinomio característico de C_p es precisamente $p(t)$. Es decir, cada matriz tiene un polinomio característico asociado y cada polinomio es el polinomio característico de una matriz.
6. Repetimos la frase definitiva de la página 192 en [TB]: **Any eigenvalue solver must be iterative.** El objetivo de un algoritmo para aproximar valores propios es producir una sucesión de números que convergen rápidamente a los valores propios.

Un resultado útil que relaciona norma y radio espectral de una matriz es el siguiente:

Proposición 11.12. Sea A una matriz cuadrada. Si λ es un valor propio de A , entonces $|\lambda| \leq \|A\|_p$ para $1 \leq p \leq \infty$. En particular, $\rho(A) \leq \|A\|_p$.

Demostración. Sea (λ, x) un par propio de A . Omitimos el subíndice de la norma por simplificar la escritura. Entonces $x \neq 0$ y podemos tomar $\|x\| = 1$.

$$|\lambda| = |\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| = \|A\|.$$

□

11.2. Factorización LU

El algoritmo para la factorización LU con pivoteo parcial es el siguiente:

11.2.1. Algoritmo: Factorización LU con pivoteo parcial

Entrada: Matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Salida: Matriz de permutación P , matriz triangular inferior con 1's en la diagonal L y matriz triangular superior U tales que $PA = LU$.

Pasos:

1. Si $n = 1$, entonces $P = 1, L = 1$ y $U = A$.
2. Si $n > 1$, escoja una matriz de permutación P_n tal que

$$P_n A = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ d & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde α es el primer elemento de la primera columna, de arriba hacia abajo, que tiene la máxima magnitud en dicha columna; esto indica que $|\alpha| \geq \|d\|_\infty$.

Factorizamos

$$P_n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

donde $l = d\alpha^{-1}$ y $S = A_{n-1} - la$.

3. Calcular $P_{n-1}S = L_{n-1}U_{n-1}$ donde P_{n-1} es una matriz de permutación, L_{n-1} es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y U_{n-1} es triangular superior.
4. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{pmatrix} P_n$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_{n-1}l & L_{n-1} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & U_{n-1} \end{pmatrix}$.

La eliminación de Gauss con pivoteo parcial sigue el siguiente algoritmo

11.2.2. Algoritmo: Eliminación de Gauss con pivoteo parcial

Entrada: Matriz invertible $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vector $b \in \mathbb{R}^n$.

Salida: Solución de $Ax = b$.

1. Factorizar $PA = LU$ por algoritmo 11.2.1.
2. Resolver el sistema $Ly = Pb$.
3. Resolver el sistema $Ux = y$.

Nota 11.13. *El primer sistema a resolver tiene matriz triangular inferior con unos en la diagonal, el cual se resuelve con una sustitución progresiva. El segundo sistema tiene matriz triangular superior y por tanto se resuelve con una sustitución regresiva. En los dos casos se trata de sistemas simplificados.*

11.3. Factorización de Cholesky

En el caso en que A sea hermitiana definida positiva o simétrica definida positiva, la eliminación de Gauss es mucho más sencilla pues existe la llamada factorización de Cholesky que además es única.

11.3.1. Algoritmo: Factorización de Cholesky

Entrada: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva

Salida: Matriz triangular inferior L con elementos diagonales positivos tal que $A = LL^T$.

1. Si $n = 1$, $L = \sqrt{A}$.
2. Si $n > 1$, se realizan las siguientes particiones y factorizaciones:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{\frac{1}{2}} & 0 \\ a\alpha^{-\frac{1}{2}} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{\frac{1}{2}} & \alpha^{-\frac{1}{2}}a^T \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

donde $S = A_{n-1} - a\alpha^{-1}a^T$.

3. Calcule $S = L_{n-1}L_{n-1}^T$, donde L_{n-1} es triangular inferior con elementos diagonales positivos.
4. $L = \begin{pmatrix} \alpha^{\frac{1}{2}} & 0 \\ a\alpha^{-\frac{1}{2}} & L_{n-1} \end{pmatrix}$.

11.3.2. Nota MATLAB

`L = chol(A, 'lower')` calcula la matriz L tal que $A = L * L^T$. En MATLAB se chequea la calidad del resultado invocando la siguiente norma: `err = norm(A - L*L', 'fro')`. El número `err` debe ser del orden de 10^{-14} . La matriz A debe ser simétrica definida positiva.

Capítulo 12

Factorización QR

Toda matriz real invertible A tiene una única factorización $A = QR$ donde Q es ortogonal y R es triangular superior con elementos diagonales positivos. En general, para una matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ con $m \geq n$, hay una matriz unitaria $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ y una matriz triangular superior $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con elementos diagonales no negativos tales que $A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$.

En el caso de un sistema lineal $Ax = b$ con A invertible, la factorización $A = QR$ permite una fácil estrategia de solución para el sistema, a saber:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ QRx &= b \\ Rx &= Q^T b \end{aligned}$$

y el último sistema es triangular superior y por tanto se resuelve por sustitución regresiva.

Para desarrollar este tema es conveniente tener presentes otros temas relacionados como los reflectores de Householder, rotaciones de Givens y proceso de Gram-Schmidt. Fuentes para estos materiales son [A], [I], [TB] y [M].

12.1. Matrices de Householder

Definición 12.1. Una matriz H se llama matriz de Hessenberg si $h_{ij} = 0$ para $i > j + 1$.

Consideremos de nuevo las notas que escribimos después del teorema de Schur 11.9. En la práctica, ¿cómo hacer para aproximar los valores propios de una matriz A ?

Se hace en dos pasos: en el primer paso, por medio de transformaciones de semejanza sobre una matriz A podemos llegar a una matriz de Hessenberg o sea, es posible encontrar una matriz invertible S tal que $S^{-1}AS = H$ con H matriz de Hessenberg. El primer paso es un método directo, que enseguida vemos cómo se realiza. El segundo paso es un proceso iterativo: se construye una sucesión de matrices de Hessenberg que converge a una matriz triangular superior.

Empezamos considerando una clase especial de matrices ortogonales llamadas matrices o reflectores de Householder.

Definición 12.2. Si $w \in \mathbb{R}^n$ con $\|w\|_2 = 1$, definimos la matriz de Householder correspondiente a w así

$$U = I - 2ww^T. \quad (12.1)$$

Proposición 12.3. Si U es una matriz de Householder entonces

$$U^T = U, \quad U^2 = I.$$

Es decir, U es simétrica y ortogonal.

Las matrices de Householder se usan para transformar un vector no nulo en uno que tenga ceros en la mayoría de sus componentes.

Sea $b \neq 0$ un vector de \mathbb{R}^n . Queremos encontrar una matriz de Householder U tal que las componentes de Ub de la $(r+1)$ a la n sean cero para algún $1 \leq r < n$.

Escribimos $m = n - r + 1$ y $b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ con $c \in \mathbb{R}^{r-1}$, $d \in \mathbb{R}^m$.

Escogemos

$$w = \begin{pmatrix} O_{r-1} \\ v \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 \\ 0 & I_m - 2vv^T \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

con $v \in \mathbb{R}^m$ y $\|v\|_2 = 1$. Pedimos

$$(I_m - 2vv^T)d = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0_{m-1} \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

para algún α . Por ser $I_m - 2vv^T$ ortogonal, $|\alpha| = \|d\|_2 = S$. Definimos

$$p = v^T d.$$

De (12.3),

$$d - 2pv = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

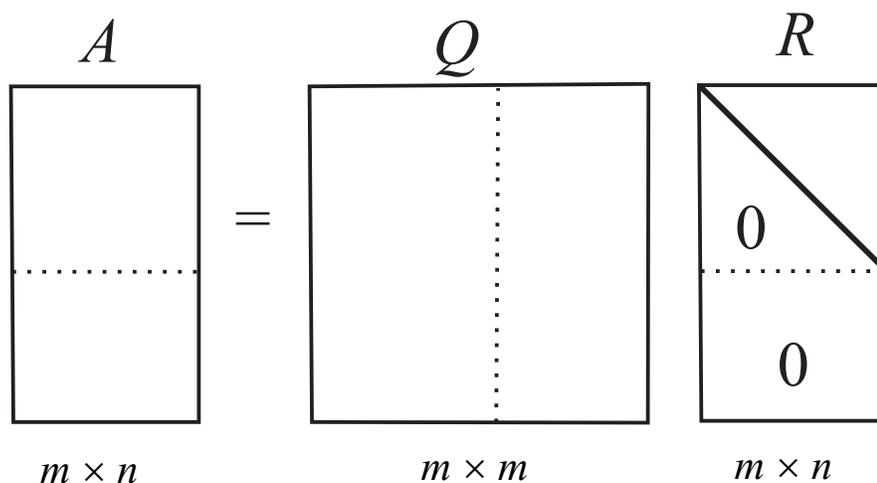


Figura 12.1: QR

Multiplicamos miembro a miembro por v^T y usamos $\|v\|_2 = 1$

$$v^T d - 2pv^T v = -p \text{ y } v^T \begin{pmatrix} \alpha \\ 0_{m-1} \end{pmatrix} = \alpha v_1.$$

Por tanto $p = -\alpha v_1$. Lo sustituimos en la primera componente del vector en (12.4)

$$d_1 + 2\alpha v_1^2 = \alpha. \quad (12.5)$$

Tomamos el signo de α de manera que $\text{sign}(\alpha) = -\text{sign}(d_1)$. De (12.5) se despeja v_1^2 y de aquí se obtiene v_1 , cualquiera de los dos valores se puede usar. Enseguida se consigue $p = -\alpha v_1$ y con p se sigue de (12.4) que

$$v_j = \frac{d_j}{2p}, \quad j = 2, \dots, m.$$

Ya queda precisado el vector w y por tanto la matriz ortogonal U .

12.2. La factorización QR

Sea A una matriz cuadrada real. Veamos que por medio de matrices de Householder se pueden obtener Q ortogonal y R triangular superior tales que $A = QR$.

Sea

$$P_r = I - 2w^{(r)}w^{(r)T}, \quad r = 1, \dots, n-1$$

donde $w^{(r)}$ se escoge como en (12.2). Escribimos a A en términos de sus columnas

$$A = (A_{*1} \ A_{*2} \ \cdots \ A_{*n}).$$

$$P_1 A = (P_1 A_{*1} \ P_1 A_{*2} \ \cdots \ P_1 A_{*n}).$$

Escogemos $b = A_{*1}$, P_1 y $w^{(1)}$ con el procedimiento visto antes para que $P_1 A$ contenga ceros debajo de la diagonal en su primera columna. Escogemos P_2 de forma similar, en tal forma que $P_2 P_1 A$ tiene ceros en su segunda columna debajo de la diagonal. En este caso b es la segunda columna de $P_1 A$.

Cuando concluye este procedimiento, queda construída la matriz triangular superior

$$R = P_{n-1} \cdots P_1 A.$$

Si en el paso r de la construcción todos los elementos debajo de la diagonal de la columna r son ceros, entonces se toma $P_r = I$. Finalmente se define

$$Q^T = P_{n-1} \cdots P_1$$

y se obtiene $A = QR$.

12.3. Valores propios

Regresamos a los dos pasos descritos al principio de la sección 12.1 para calcular los valores propios de una matriz. El paso 1 consiste en utilizar matrices de Householder para reducir a A a una matriz semejante que es de Hessenberg. El paso 2 es un procedimiento iterativo que pasamos a explicar enseguida.

Sean Q ortogonal y R triangular superior tales que $A = QR$. Sea $A_1 = A$. Definimos la sucesión de matrices A_m , Q_m y R_m por

$$A_m = Q_m R_m, \quad A_{m+1} = R_m Q_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (12.6)$$

donde $A_m = Q_m R_m$ es la factorización QR de A_m .

Nótese que $A_{m+1} = Q_m^T A_m Q_m$, lo que implica que todas las matrices de la sucesión son ortogonalmente semejantes a A . En realidad

$$A_{m+1} = Q_m^T \cdots Q_1^T A_1 Q_1 \cdots Q_m. \quad (12.7)$$

Sean

$$P_m = Q_1 \cdots Q_m \text{ y } U_m = R_m \cdots R_1. \quad (12.8)$$

La matriz P_m es ortogonal y la matriz U_m es triangular superior.

De (12.7) obtenemos

$$A_{m+1} = P_m^T A_1 P_m, \quad m \geq 1.$$

Enseguida usamos (12.7) con m en lugar de $m - 1$ para llegar a

$$Q_1 \cdots Q_{m-1} A_m = A_1 Q_1 \cdots Q_{m-1}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} P_m U_m &= Q_1 \cdots Q_m R_m \cdots R_1 \\ &= Q_1 \cdots Q_{m-1} A_m R_{m-1} \cdots R_1 \\ &= A_1 Q_1 \cdots Q_{m-1} R_{m-1} \cdots R_1 \\ &= A_1 P_{m-1} U_{m-1}. \end{aligned}$$

Como $A_1 = P_1 U_1 = Q_1 R_1$, iteración de la igualdad $P_m U_m = A_1 P_{m-1} U_{m-1}$ lleva a

$$P_m U_m = A_1^m, \quad m \geq 1.$$

Este proceso iterativo es mucho más sencillo si la matriz a la que se le aplica ya ha pasado por el paso 1 y por tanto es una matriz de Hessenberg.

Teorema 12.4. *La sucesión A_m definida en (12.6) converge a una matriz triangular superior que contiene los valores propios de A en su diagonal. Si A es simétrica, la sucesión converge a una matriz diagonal.*

Demostración. Ver theorem 9.6 de [A]. □

Enseguida aplicamos teorema 9.1 para demostrar que el algoritmo QR es numéricamente estable. En la demostración siguiente se requiere que la norma matricial sea $\|\cdot\|_2$. Los principales resultados sobre $\|\cdot\|_2$ que se usan aparecen en el siguiente lema.

Lema 12.5. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces*

1. $\|A^T\|_2 = \|A\|_2$.
2. Si U es una matriz ortogonal $n \times n$, entonces $\|U\|_2 = 1$ y $\|UA\|_2 = \|A\|_2 = \|UA\|_F$. (Para norma Frobenius basta pensar en su definición como traza $(A^T A)$.)

3. La norma de Frobenius es compatible con la norma 2, es decir,

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$$

(se piensa en Ax como vector de productos internos $\begin{pmatrix} A_{1*}x \\ \vdots \\ A_{n*}x \end{pmatrix}$ y se aplica desigualdad de Cauchy-Schwarz.)

Demostración. El espectro de AA^T es el mismo de $A^T A$ pues si $AA^T y = \mu y$ entonces $A^T A (A^T y) = \mu A^T y$. Análogo en la otra dirección, por tanto $\|A^T\|_2^2 = \rho(AA^T) = \rho(A^T A) = \|A\|_2^2$.

Ahora, si U es unitaria, $\|U\|_2^2 = \rho(U^T U) = \rho(I) = 1$. Además, $\|UAx\|_2^2 = (UAx)^T (UAx) = x^T A^T U^T U Ax = x^T A^T Ax = \|Ax\|_2^2$, por tanto $\|UA\|_2 = \|A\|_2$. \square

Teorema 12.6. Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular, $b \in \mathbb{R}^n$ no nulo y suponga que $Ax = b$. Supongamos

$$\begin{aligned} A + E &= QR, \quad \varepsilon_A = \frac{\|E\|_2}{\|A\|_2} \\ Qy &= b + r_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\|r_1\|_2}{\|b\|_2} \\ Rz &= y + r_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\|r_2\|_2}{\|y\|_2}. \end{aligned}$$

Si $\|A^{-1}\| \|E\| \leq \frac{1}{2}$ entonces

$$\frac{\|z - x\|_2}{\|x\|_2} \leq 2\kappa(A) (\varepsilon_A + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 (1 + \varepsilon_1))$$

Demostración. Se aplica teorema 9.1 con $S_1 = Q$, $S_2 = R$. Haciendo las sustituciones correspondientes, el factor que aparece en ese teorema acompañando a $\varepsilon_2 (1 + \varepsilon_1)$ es $\frac{\|R^{-1}\|_2 \|Q^{-1}\|_2}{\|(A+E)^{-1}\|_2}$. Por ser Q ortogonal, $\|Q\|_2^2 = \rho(Q^T Q) = \rho(I) = 1$. Además,

$$\|(A + E)^{-1}\|_2 = \|(QR)^{-1}\|_2 = \|R^{-1}Q^{-1}\|_2 = \|R^{-1}\|_2.$$

La última igualdad es de nuevo debido a la ortogonalidad de Q pues

$$\|R^{-1}Q^{-1}\|_2 = \|Q^{-T}R^{-T}\|_2 = \|QR^{-T}\|_2 = \|R^{-T}\|_2 = \|R^{-1}\|_2.$$

\square

12.4. Nota MATLAB

$[Q,R] = \text{qr}(A)$ donde A es $m \times n$, produce R , una matriz $m \times n$ que es trapezoidal superior y una matriz Q que es $m \times m$ unitaria tales que $A = Q^*R$. La matriz R trapezoidal superior es triangular superior si $m = n$ y es de la forma $\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$ con T triangular superior si $m > n$.

Capítulo 13

Descomposición en valores singulares (SVD)

Esta es la factorización principal para matrices rectangulares, no solo porque se usa en la definición de pseudoinversa y en la aproximación de mínimos cuadrados, sino también porque es una de las factorizaciones que más información sobre la matriz aporta, por ejemplo rango (rank), subespacio imagen (range) y núcleo. Pero estas razones son insuficientes de acuerdo con Carla D. Martin y Mason A. Porter quienes en [MP] exhiben una lista impresionante de aplicaciones de la SVD que va desde ingeniería y ciencias hasta política partidista en Estados Unidos.

La SVD fue descubierta en la primera mitad del siglo XIX y de su desarrollo temprano hay un recuento [S4] hecho por un especialista, el profesor G.W. Stewart. Para escribir estas notas utilizamos principalmente los libros [Da], [I], [M], [JR] y [TB].

Los principales temas que tratamos en el capítulo son la demostración del teorema de la factorización SVD, las aproximaciones de rango 1, relación con el rango (rank) y relación con los valores propios.

Iniciamos con un lema sobre matrices simétricas.

Lema 13.1. 1. Si A es real simétrica entonces sus valores propios son reales.

2. Si A es real simétrica definida (semidefinida) positiva entonces sus valores propios son positivos (no negativos).

Demostración. Supongamos $Ax = \lambda x$ con $x \neq 0$. Sea \bar{x} el conjugado de x . Entonces $\overline{Ax} = A\bar{x}$ y $\overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\bar{x}$. Como $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$, entonces $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ es un par propio de A . Además,

$$\bar{x}^T x = x^T \bar{x} = \sum_i x_i \bar{x}_i = \sum_i |x_i|^2 > 0 \text{ pues } x \neq 0.$$

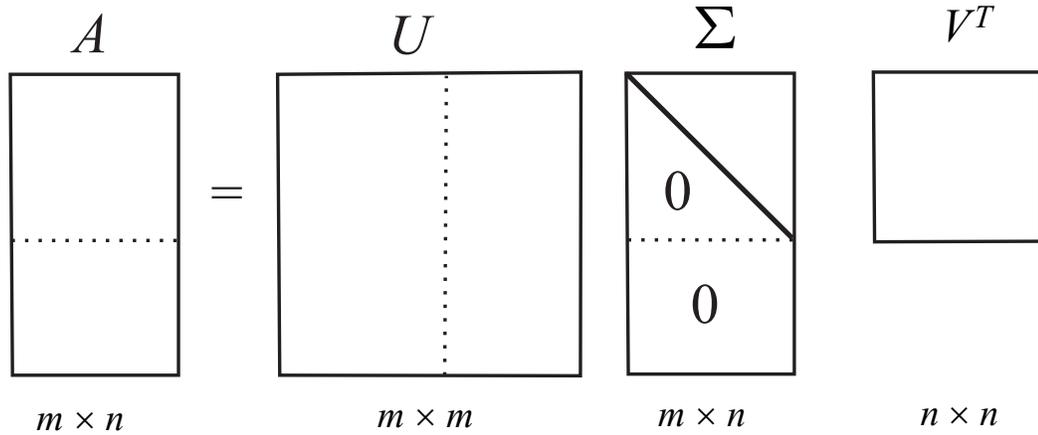


Figura 13.1: SVD

Concluimos que $\bar{x}^T x = x^T \bar{x}$ es un número real positivo. Enseguida consideramos la ecuación $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$. Al premultiplicarla con x^T llegamos a

$$x^T A\bar{x} = x^T \bar{\lambda}\bar{x} = \bar{\lambda}x^T \bar{x}.$$

Por otro lado, de $Ax = \lambda x$ obtenemos

$$\bar{x}^T Ax = \bar{x}^T \lambda x = \lambda \bar{x}^T x = \lambda x^T \bar{x}.$$

Finalmente usamos la simetría de A .

$$x^T A\bar{x} = (A\bar{x})^T x = \bar{x}^T A^T x = \bar{x}^T Ax$$

lo cual indica $\bar{\lambda}x^T \bar{x} = \lambda x^T \bar{x}$. Cancelando, $\bar{\lambda} = \lambda$, es decir $\lambda \in \mathbb{R}$. La positividad se desprende de $Ax = \lambda x$ con $x \neq 0$ pues

$$0 < x^T Ax = \lambda x^T x = \lambda \|x\|_2^2$$

lo cual implica $\lambda > 0$. □

13.1. La factorización SVD

Teorema 13.2. (Descomposición en valores singulares SVD) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Entonces existen matrices ortogonales $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que

$$A = U\Sigma V^T,$$

donde $\Sigma = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$ si $m \geq n$ o $\Sigma = \begin{pmatrix} F & 0 \end{pmatrix}$ si $m < n$, con

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix} \text{ o } F = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m \end{pmatrix}$$

y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ donde $p = \min\{m, n\}$. La última parte se acostumbra resumir así: $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. A pesar de haber hecho el enunciado con esta generalidad, solo tratamos el caso $m \geq n$.

Demostración. La matriz $A^T A$ es simétrica semidefinida positiva. Digamos que sus valores propios, que son reales no negativos, son $\lambda_i = \sigma_i^2$, $i = 1, \dots, n$. Llamemos V_i a sus vectores propios asociados. Supongamos además que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ y $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$. Hagamos $\Psi_1 = (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_r)$, $\Psi_2 = (V_{r+1} \ V_{r+2} \ \dots \ V_n)$ y $V = (\Psi_1 \ \Psi_2)$. Con base en la primera observación después del teorema de ejes principales 11.10, las columnas de V son una base ortonormal de vectores propios de $A^T A$ y esto significa

$$V_i^T A^T A V_i = \sigma_i^2 \text{ y } V_i^T A^T A V_j = 0 \text{ para } i \neq j. \quad (13.1)$$

Definimos los vectores

$$U_i = \frac{1}{\sigma_i} A V_i \text{ para } i = 1, \dots, r. \quad (13.2)$$

Forman un conjunto ortogonal pues

$$U_i^T U_j = \frac{1}{\sigma_i} (A V_i)^T \frac{1}{\sigma_j} A V_j = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} V_i^T A^T A V_j = \delta_{ij}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker definida así: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Sea $\Lambda_1 = (U_1 \ U_2 \ \dots \ U_r)$ y escojamos $\Lambda_2 = (U_{r+1} \ U_{r+2} \ \dots \ U_m)$ con la condiciones

$$U_j^T A = 0 \text{ y } \|U_j\|_2 = 1$$

que automáticamente permiten que $U = (\Lambda_1 \ \Lambda_2)$ sea una matriz ortogonal cuyas

columnas son una base ortonormal de \mathbb{R}^m . Finalmente,

$$\begin{aligned}
 U^T A V &= \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ \vdots \\ U_m^T \end{pmatrix} A (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} V_1^T A^T \\ \frac{1}{\sigma_2} V_2^T A^T \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_r} V_r^T A^T \\ U_{r+1}^T \\ \vdots \\ U_m^T \end{pmatrix} A (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} \sigma_1^2 & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2} \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sigma_r} \sigma_r^2 \end{pmatrix} = \Sigma
 \end{aligned}$$

□

Nota 13.3. 1. Los elementos de la diagonal σ_i se denominan valores singulares de A .

2. Los valores propios de $A^T A$ y AA^T son los mismos, es decir, $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$. Esto se debe a que

$$AA^T = U \Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U \Sigma \Sigma^T U^T.$$

Pero $\Sigma \Sigma^T = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$, es decir, AA^T es unitariamente semejante a la misma matriz diagonal que $A^T A$.

3. Las columnas de U se denominan vectores singulares a izquierda. Se acostumbra escribir $U = (U_1, U_2, \dots, U_m)$.

4. Las columnas de V se llaman vectores singulares a derecha. Se acostumbra escribir $V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$.

5. Como trabajamos solamente el caso $m \geq n$, entonces hay n valores singulares para A (pero puede haber repeticiones en este conteo, también puede haber ceros.)

6. $\sigma_1 = \max_i \sigma_i$ y $\sigma_n = \min_i \sigma_i$.

7. Los valores singulares son únicos pero los vectores singulares no lo son. Sin embargo, por abuso del lenguaje, se acostumbra hablar de **la** descomposición en valores singulares de A .

Proposición 13.4. (SVD reducida) Si $A = U\Sigma V^T$ es la SVD de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$), entonces se puede obtener también la siguiente factorización

$$A = \mathcal{U}\Sigma_1 V^T$$

donde $\mathcal{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ está compuesto por las primeras n columnas de U , por tanto es una matriz de columnas ortonormales y $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Proposición 13.5. Sean $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ los valores singulares de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$). Entonces

1. $\|A\|_2 = \sigma_1$.
2. $\sigma_n = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$.
3. $\|A\|_F = \left(\sum_i^n \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
4. Cuando A es $n \times n$ no singular, $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$.
5. Cuando A es $n \times n$ no singular, $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.
6. $\text{rank}(A) = r$, el número de valores singulares no nulos.

Demostración. 1. Se usa lema 12.5: $\|A\|_2 = \|U\Sigma V^T\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \max \sigma_i = \sigma_1$.

2. $A = U \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} V^T$. Sea z tal que $\|z\|_2 = 1$ y $\|Az\|_2 = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$. Sea $y = V^T z$.

$$\begin{aligned} \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 &= \|Az\|_2 = \|\mathcal{U}\Sigma_1 V^T z\|_2 = \|\Sigma_1 y\|_2 = \left(\sum \sigma_i^2 |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \sigma_n \|y\|_2 = \sigma_n. \end{aligned}$$

Para la otra desigualdad,

$$\sigma_n = \|\Sigma_1 e_n\|_2 = \|\mathcal{U}^T A V e_n\|_2 = \|A V e_n\|_2 \geq \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

3. $\|A\|_F = \|U\Sigma V^T\|_F = \|\Sigma\|_F = \left(\sum \sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
4. Como A es no singular entonces Σ es no singular, es decir, todos los valores singulares son positivos. $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$ y el resultado sigue de parte 1.
5. Consecuencia de partes 1 y 2.
6. Como $A = U\Sigma V^T$ con U, V no singulares, por definición 5.8 $A \sim \Sigma$ y por proposición 5.21 tienen el mismo rango (rank). Además $\text{rank}(\Sigma) = \text{número de valores singulares no nulos}$.

□

Los valores singulares están bien condicionados en el siguiente sentido.

Proposición 13.6. Sean $A, A + E \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, con valores singulares $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ y $\eta_1 \geq \dots \geq \eta_n$ respectivamente. Entonces

$$|\sigma_1 - \eta_1| \leq \|E\|_2 \quad \text{y} \quad |\sigma_n - \eta_n| \leq \|E\|_2.$$

Demostración. Para σ_1 y η_1 se sigue de parte 1 de la proposición anterior y de la proposición 8.5. Para σ_n y η_n pensamos en A como transformación lineal y en especial como función continua definida en \mathbb{R}^n . Tomamos $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|y\|_2 = 1$ y $\|Ay\|_2 = \sigma_n$.

$$\begin{aligned} \eta_n &= \min_{\|x\|_2=1} \|(A + E)x\|_2 \leq \|(A + E)y\|_2 \leq \|Ay\|_2 + \|Ey\|_2 \\ &= \sigma_n + \|Ey\|_2 \leq \sigma_n + \|E\|_2. \end{aligned}$$

Para la otra desigualdad, tomamos y tal que $\|(A + E)y\|_2 = \eta_n$ y $\|y\|_2 = 1$.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \leq \|Ay\|_2 = \|(A + E)y - Ey\|_2 \\ &\leq \|(A + E)y\|_2 + \|Ey\|_2 = \eta_n + \|Ey\|_2 \leq \eta_n + \|E\|_2. \end{aligned}$$

□

Hay unas matrices de rango (rank) 1 estrechamente relacionadas con la SVD. Se trata de los productos exteriores.

Proposición 13.7. Sean $u \in \mathbb{R}^m$ y $v \in \mathbb{R}^n$ no nulos. Entonces $\text{rank}(uv^T) = 1$.

Demostración. Recordemos que $uv^T = (uv_1 \quad uv_2 \quad \dots \quad uv_n)$ o sea todas las columnas son múltiplos del vector u .

□

Proposición 13.8. Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$ y $\text{rank}(A) = r$ tiene la SVD dada en teorema 13.2 entonces

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j U_j V_j^T.$$

Demostración. Sean $U = (\mathcal{U}_r \ \mathcal{U}_{m-r})$ y $V = (\mathcal{V}_r \ \mathcal{V}_{n-r})$ donde $\mathcal{U}_r, \mathcal{U}_{m-r}$ contienen las primeras r columnas y las últimas $m - r$ columnas de U respectivamente. Análogo para V . Resulta que

$$A = \mathcal{U}_r \Sigma_r \mathcal{V}_r^T = (\sigma_1 U_1 \cdots \sigma_r U_r) \begin{pmatrix} V_1^T \\ \vdots \\ V_r^T \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^r \sigma_j U_j V_j^T, \quad (13.3)$$

donde $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$. □

Nota 13.9. La fórmula (13.3) es una de las más aplicadas en lo que respecta a SVD. Para una aplicación básica al procesamiento de imágenes sugerimos consultar sección 8.4 de [ND]. Los autores de este libro aprecian tanto esta aplicación que la usaron para la carátula.

Teorema 13.10. Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$ y $\text{rank}(A) = r$ tiene la SVD $A = U \Sigma V^T$ dada en teorema 13.2 y $U = (\mathcal{U}_r \ \mathcal{U}_{m-r})$, $V = (\mathcal{V}_r \ \mathcal{V}_{n-r})$ donde $\mathcal{U}_r, \mathcal{V}_r$ contienen las primeras r columnas de U y V respectivamente, entonces:

1. Las columnas de \mathcal{U}_r forman una base ortonormal para $R(A)$.
2. Las columnas de \mathcal{V}_{n-r} forman una base ortonormal para $\ker(A)$.
3. Las columnas de \mathcal{V}_r forman una base ortonormal para $R(A^T)$.
4. Las columnas de \mathcal{U}_{m-r} forman una base ortonormal para $\ker(A^T)$.

Demostración. 1. Sin pérdida de generalidad suponemos $A \neq 0$. De (13.3) $A = \mathcal{U}_r \Sigma_r \mathcal{V}_r^T$ y Σ_r es diagonal sin ceros en la diagonal.

$$\Sigma_r \mathcal{V}_r^T = \begin{pmatrix} \sigma_1 V_1^T \\ \vdots \\ \sigma_r V_r^T \end{pmatrix}$$

y como V es unitaria entonces $\{V_1, \dots, V_r\}$ es un conjunto LI. Afirmamos que el conjunto $\{\sigma_1 V_1, \dots, \sigma_r V_r\}$ también es LI pues si $0 = \sum \alpha_i \sigma_i V_i$ entonces

$\alpha_i \sigma_i = 0$ para todo i y como todos los σ_i son no nulos, entonces son los α_i los que deben anularse. Esto implica que $\Sigma_r \mathcal{V}_r^T$ tiene filas LI y por teorema 6.10, $R(A) = R(\mathcal{U}_r)$.

2. Sin pérdida de generalidad suponemos $\ker(A) \neq \{0\}$. De (13.3) $A = \mathcal{U}_r \Sigma_r \mathcal{V}_r^T$ y Σ_r es diagonal sin ceros en la diagonal.

$$\mathcal{U}_r \Sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 U_1 & \cdots & \sigma_r U_r \end{pmatrix}$$

y estas columnas son LI, luego $\ker(A) = \ker(\mathcal{V}_r^T)$. Por teorema 6.7,

$$\ker(A) = \ker(\mathcal{V}_r^T) = R(\mathcal{V}_r)^\perp.$$

El subespacio ortogonal de $R(\mathcal{V}_r)$ es $R(\mathcal{V}_{n-r})$ y así queda demostrado el teorema.

3. Aplicar parte 1 a A^T .
4. Aplicar parte 2 a A^T .

□

13.2. Nota MATLAB

`[U,S,V] = svd(A)` sirve para efectuar la SVD de A . Las matrices U y V , que cumplen $A = USV^T$, son ortogonales (unitarias) con m y n filas respectivamente. Si A es $m \times n$ y $m \geq n$, S es de la forma $\begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$ donde D es diagonal $n \times n$.

`s = svds(A,k)` sirve para hallar los k valores singulares más grandes.

13.3. ¿Qué sigue?

Esta corta sección sirve para cerrar el capítulo sobre SVD y, al menos por ahora, el manuscrito completo. La última sección del artículo [MP] tiene el siguiente título: **Everywhere you go, always take the SVD with you**. En mi caso, esto es lo que yo hago con el **álgebra lineal numérica**, pues me hace falta en mi trabajo investigativo.

El objetivo es que muchos lectores de estas notas eventualmente se vuelvan usuarios o investigadores del álgebra lineal numérica y deban mantenerla a la mano.

Este manuscrito es una invitación al álgebra lineal numérica, no es un tratado ni un libro de texto. Sugerencias para mejorarlo, son bienvenidas.

Bibliografía

- [AM] Acosta, C.D. y C.E. Mejía, Cuaderno de Investigación: Métodos Iterativos para Sistemas Lineales, Universidad Nacional de Colombia, Manizales, 2005. Disponible en http://medellin.unal.edu.co/~cemejia/doc/Cuaderno_Cdacosta_Cemejia.pdf
- [A] Atkinson, K.E. An introduction to numerical analysis, 2a. ed. John Wiley and sons, 1989.
- [C] Ciarlet, P.G. Introduction to numerical linear algebra and optimisation, Cambridge University Press, 1989.
- [Da] Datta, B.N. Numerical linear algebra and applications, 2a. ed. SIAM, 2010.
- [D] Demmel, J.W., Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, 1997.
- [GO] Golub, G. y J.M. Ortega, Scientific computing, an introduction with parallel computing, Academic Press, 1993.
- [GV] Golub, G. y C.F. Van Loan, Matrix computations, 4a. ed. The Johns Hopkins University Press, 2013.
- [HH] Higham, D.J. y N.J. Higham, Matlab Guide, 2a. ed. SIAM, 2005.
- [HS] Hirsch, M.W. y S. Smale, Differential equations, dynamical systems and linear algebra, Academic Press, 1974.
- [HK] Hoffman, K. y R. Kunze, Algebra lineal, Prentice Hall Hispanoamericana, 1973.
- [HJ] Horn, R.A. y C.R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1990.
- [H] Hungerford, T.W. Algebra, Springer, 1987.

- [I] Ipsen, I.C.F. Numerical Matrix Analysis, linear systems and least squares, SIAM, 2009.
- [JR] Johnson, L.W. y R.D. Riess, Numerical Analysis, 2a. ed. Addison-Wesley, 1982.
- [KC] Kincaid, D. y W. Cheney, Numerical analysis, mathematics of scientific computing, 3a. ed. Brooks/Cole Thomson Learning, 2002.
- [Lang] Lang, S. Algebra lineal, Fondo Educativo Interamericano, 1974.
- [L] Laub, A.J. Matrix analysis for scientists and engineers, SIAM, 2005.
- [Layton] Layton, W. y M. Sussman, Numerical Linear Algebra, 2014, disponible en <http://www.lulu.com>
- [MP] Martin, C.D. y M.A. Porter, The extraordinary SVD. arXiv:1103.2338v5, 2012.
- [Me] Mejía, C.E. Invitación al análisis numérico, 2002, Notas de clase disponibles en <http://medellin.unal.edu.co/~cemejia/doc/vinculos.html>
- [M] Meyer, C.D. Matrix analysis and applied linear algebra, SIAM, 2000.
- [Mu] Murty, K.G. Computational and algorithmic linear algebra and n-dimensional geometry, World Scientific Publishing, 2015.
- [ND] Noble, B. y J.W. Daniel, Applied Linear Algebra, 3a. ed. Prentice-Hall, 1988.
- [Ortega] Ortega, J.M. Matrix theory, a second course, Springer, 1987.
- [O] Ortega, J.M. Numerical Analysis, a second course, SIAM, 1990.
- [P] Poole, D. Algebra lineal, una introducción moderna, 2a. ed. Cengage Learning, 2007.
- [SV] Saad, Y. y H.A. van der Vorst, Iterative solution of linear systems in the 20th century, Journal of Computational and Applied Mathematics 123 (2000) 1-33.
- [Se] Sewell, G. Computational methods of linear algebra, 2a. ed. Wiley-Interscience, 2005.

- [S1] Stewart, G.W., Matrix Algorithms Volume I Basic Decompositions, SIAM, 1998.
- [S2] Stewart, G.W. Afternotes on Numerical Analysis, SIAM, 1996.
- [S3] Stewart, G.W. Afternotes goes to Graduate School, SIAM, 1998.
- [S4] Stewart, G.W. On the early history of the singular value decomposition, SIAM Review 35 (1993) 551-566.
- [S] Strang, G. Algebra lineal y sus aplicaciones, 4a. ed. Thomson, 2007.
- [TB] Trefethen, L.N. y D. Bau III, Numerical linear algebra, SIAM, 1997.
- [vdG] van de Geijn, R.A. Linear Algebra: Foundations to Frontiers. A Collection of Notes on Numerical Linear Algebra, 2014. Disponible en <http://www.ulaff.net>
- [W] Watkins, D.A. Fundamentals of matrix computations, 2a. ed. Wiley-Interscience, 2002.